

$$\theta) x^2 - (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

$$\iota) x^2 + (5 - 3)x - 5 \cdot 3 = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots)$$

(Μονάδες 7)

**Θέμα 2ο****α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση  $5x^3 - 20x$** 

(Μονάδες 3)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $7x^3 = 2(10x + x^3)$ 

(Μονάδες 3,5)

**Θέμα 3ο**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις  $A = x^4 - 4x^2$ ,  $B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$   
και  $A - B$

(Μονάδες 6,5)

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****Θέμα 1ο**

$$\alpha) 3x^2 - 12xy + xy\omega - 15x = 3x(x - 4y + 3\omega - 5)$$

$$\beta) \alpha(x^2 + 1) - 3\beta(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(\alpha - 3\beta + 2)$$

$$\gamma) 49x^2 - 16 = (7x + 4)(7x - 4)$$

$$\delta) 8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\epsilon) 8 + 27x^3 = (2 + 3x)(4 + 6x + 9x^2)$$

$$\sigma\tau) 4x^2 - 12x + y = (2x - 3)^2$$

$$\zeta) 16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$$

$$\eta) x^2 + (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (x + 5) \cdot (x + 3)$$

$$\theta) x^2 - (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (x - 5) \cdot (x - 3)$$

$$\iota) x^2 + (5 - 3)x - 5 \cdot 3 = (x + 5) \cdot (x - 3)$$

**Θέμα 2ο**

$$\alpha) 5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4) = 5x(x^2 - 2^2) = 5x(x - 2)(x + 2)$$

$$\beta) 7x^3 = 20x + 2x^3 \text{ ή } 7x^3 - 20x - 2x^3 = 0 \text{ ή}$$

$$5x^3 - 20x = 0 \text{ ή } 5x(x - 2)(x + 2) = 0, \text{ άρα } x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$$

**Θέμα 3ο**

$$\bullet A = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 2^2) = x^2(x + 2)(x - 2)$$

$$\bullet B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

$$\begin{aligned} \bullet A - B &= x^2(x+2)(x-2) - (2x-1)(x-2)(x+2) = \\ &= (x+2)(x-2) \cdot [x^2 - (2x-1)] = (x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 1) = \\ &= (x+2)(x-2)(x-1)^2 \end{aligned}$$

## A.1.9

## «Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις»

## ΘΕΩΡΙΑ

## 1. Ορισμός ρητής παράστασης

Μια αλγεβρική παράσταση [όπως π.χ. οι  $\frac{x^3 + 1}{x - 2}$ ,  $\frac{x - y - 1}{x^2 + 1}$ ,  $\frac{10y^2\omega}{x^2 + y}$ ,  $\frac{1}{xy - 2}$ ] που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλά **ρητή παράσταση**.

## 2. Περιορισμοί

Στην παράσταση  $\frac{4}{x - 3}$ , το  $x$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή 3, αφού για  $x = 3$  ο παρανομαστής  $x - 3$  γίνεται ίσος με 0.

Γενικά, σε μια (ρητή) παράσταση οι μεταβλητές της δεν μπορούν να πάρουν τις τιμές εκείνες για τις οποίες ο παρανομαστής γίνεται ίσος με το 0 (αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρανομαστή το 0).

Παραδείγματα:

- Στην παράσταση  $\frac{3x - 6}{x}$ , το  $x$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0.
- Στην παράσταση  $\frac{x - 2}{x - 10}$ , το  $x$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή 10.
- Στην παράσταση  $\frac{3x}{2y - 10}$ , το  $y$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή 5.
- Στην παράσταση  $\frac{10}{t + 2}$ , το  $t$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή  $-2$ .

**Σχόλιο** Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοούμε ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή της.

## 3. Απλοποίηση

Αν σε ένα κλάσμα και οι δύο όροι του (αριθμητής και παρανομαστής) είναι γινόμενα, και στα γινόμενα αυτά υπάρχει κοινός παράγοντας, τότε ο παράγοντας αυτός μπορεί να απλοποιηθεί (παραληφθεί) και το κλάσμα να πάρει απλούστερη μορφή.

Αυτό εξηγείται ως εξής:  $\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \gamma} = \frac{\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\gamma} = 1 \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ .

••• **Παραδείγματα:**

- $\frac{3xy}{5x^2} = \frac{3y}{5x}$
- $\frac{2x^3a}{5x^3y} = \frac{2a}{5y}$
- $\frac{3x(x+2)}{4(x-3)} = \frac{3(x+2)}{4(x-3)} = \frac{3x+6}{4x-12}$
- $\frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3}$

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**04** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α)  $\frac{2}{x}$     β)  $\frac{x}{y-2}$     γ)  $\frac{4}{\beta+2}$     δ)  $\frac{x-2}{3\alpha+1}$     ε)  $\frac{x-3}{(x-2)(x-5)}$

### ΛΥΣΗ

- α) Το κλάσμα  $\frac{2}{x}$  δεν ορίζεται όταν ο παρανομαστής είναι ίσος με 0, δηλαδή όταν  $x = 0$ .
- β) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν  $y - 2 = 0$ , δηλαδή όταν  $y = 2$ .
- γ) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν  $\beta + 2 = 0$ , δηλαδή όταν  $\beta = -2$ .
- δ) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν  $3\alpha + 1 = 0$ , δηλαδή όταν  $3\alpha = -1$ , δηλαδή  $\alpha = -\frac{1}{3}$ .
- ε) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν  $(x - 2)(x - 5) = 0$ . Η σχέση  $(x - 2)(x - 5) = 0$  ισχύει όταν  $x - 2 = 0$  ή  $x - 5 = 0$ , δηλαδή όταν  $x = 2$  ή  $x = 5$ . Επομένως, το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν  $x = 2, x = 5$ .

**05.** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α)  $\frac{10}{x-6}$     β)  $\frac{y-10}{3y-2}$     γ)  $\frac{x-2}{(x+1)^2}$     δ)  $\frac{5x+10}{x(x-2)}$     ε)  $\frac{1-x^2}{y-x^2}$ .

### ΛΥΣΗ

Η παράσταση που έχουμε κάθε φορά ορίζεται αν:

α)  $x - 6 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 6$

β)  $3y - 2 \neq 0$ , δηλαδή  $y \neq \frac{2}{3}$

γ)  $(x + 1)^2 \neq 0$ , δηλαδή  $x + 1 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq -1$

δ)  $x(x - 2) \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 0$  και  $x - 2 \neq 0$ , δηλαδή  $x \neq 0$  και  $x \neq 2$ .

ε)  $y - x^2 \neq 0$ , δηλαδή  $y \neq x^2$ .

**06** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες δεν ορίζεται η αριθμητική τιμή, σε καθεμία από τις παραστάσεις:

α)  $\frac{1 + \frac{3}{x-2}}{x-5}$       β)  $\frac{x-4}{\frac{2}{x}-1}$       γ)  $(x-4) : \left(\frac{2}{x}-1\right)$

**ΛΥΣΗ**

α) Στην παράστασή μας, υπάρχουν παρανομαστές οι  $x - 2$  και  $x - 5$ . Επομένως, η παράστασή μας δεν ορίζεται όταν  $x - 2 = 0$  ή  $x - 5 = 0$ , δηλαδή όταν  $x = 2$  ή  $x = 5$ .

β) Στην παράστασή μας, υπάρχουν οι παρανομαστές, οι  $x$  και  $\frac{2}{x} - 1$ . Επομένως, η παράστασή μας δεν ορίζεται όταν  $x = 0$  ή  $\frac{2}{x} - 1 = 0$ , δηλαδή όταν  $x = 0$  ή  $\frac{2}{x} = 1$ , δηλαδή όταν  $x = 0$  ή  $x = 2$ .

γ) Η παράσταση  $(x - 4) : \left(\frac{2}{x} - 1\right)$  είναι ένας άλλος τρόπος γραφής της παράστασης  $\frac{x-4}{\frac{2}{x}-1}$ . Επομένως, ισχύουν όσα ακριβώς είπαμε στο β, και έτσι η παράσταση αυτή δεν ορίζεται όταν  $x = 0$ , καθώς και όταν  $x = 2$ .

**07** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{8x^6}{12x^2}$       β)  $\frac{5a^2}{10a^6}$       γ)  $\frac{10x^2y}{15xy^3}$       δ)  $\frac{2(x+1)^5}{8(x+1)^2}$

**ΛΥΣΗ**

α)  $\frac{8x^6}{12x^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x^4}{3 \cdot 4 \cdot x^2} = \frac{2x^4}{3}$       β)  $\frac{5a^2}{10a^6} = \frac{5 \cdot a^2}{2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot a^4} = \frac{1}{2a^4}$

$$\gamma) \frac{10x^2y}{15xy^3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}{3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$\delta) \frac{2(x+1)^5}{8(x+1)^2} = \frac{2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)^3}{2 \cdot 4 \cdot (x+1)^2} = \frac{(x+1)^3}{4}$$

**08** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$$

$$\beta) \frac{xy - y}{5y^2}$$

$$\gamma) \frac{5(x-2) + (x-2)y}{y^2 - 25}$$

$$\delta) \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$$

$$\sigma\tau) \frac{5x - 5y + \alpha x - \alpha y}{x^2 - xy}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^4 - y^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}$$

### ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)^2} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$$

$$\beta) \frac{xy - y}{5y^2} = \frac{y(x - 1)}{5y^2} = \frac{x - 1}{5y}$$

$$\gamma) \frac{5(x-2) + (x-2)y}{y^2 - 25} = \frac{(x-2)(5+y)}{y^2 - 5^2} = \frac{(x-2)(5+y)}{(y+5)(y-5)} = \frac{x-2}{y-5}$$

$$\delta) \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \frac{x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2}{x^2 - 4^2} = \frac{(x-4)^2}{(x+4)(x-4)} = \frac{x-4}{x+4}$$

$$\epsilon) \frac{5x - 5y + \alpha x - \alpha y}{x^2 - xy} = \frac{5(x-y) + \alpha(x-y)}{x(x-y)} = \frac{(x-y)(5+\alpha)}{x(x-y)} = \frac{5+\alpha}{x}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^4 - y^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} = \frac{(x^2)^2 - (y^2)^2}{(x^2)^2 - 2x^2y^2 + (y^2)^2} =$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

**09** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x+y}{-x-y}$$

$$\beta) \frac{x-y}{y-x}$$

$$\gamma) \frac{2x-2y}{3y-3x}$$

### ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{x+y}{-x-y} = \frac{x+y}{-(x+y)} = \frac{1 \cdot (x+y)}{-1 \cdot (x+y)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\beta) \frac{x-y}{y-x} = \frac{x-y}{-(x-y)} = -1.$$

$$\gamma) \frac{2x - 2y}{3y - 3x} = \frac{2(x - y)}{3(y - x)} = \frac{2(x - y)}{-3(x - y)} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

**Σχόλιο:** Θυμίζουμε ότι μια διαφορά  $\beta - \alpha$  μπορεί να γραφεί και ως  $\beta - \alpha = -\alpha + \beta = -(\alpha - \beta)$ .

## ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

**10.** Όταν σε μια αλγεβρική παράσταση εμφανίζονται ένα ή περισσότερα κλάσματα, τότε, για να ορίζεται η παράσταση αυτή, πρέπει όλοι οι παρονομαστές που εμφανίζονται σε αυτή να είναι  $\neq 0$ .

Για παράδειγμα, για να ορίζεται η παράσταση  $\frac{x - 10}{x - 5} + 1$  πρέπει:  $x - 5 \neq 0$  και  $x \neq 0$  και  $\frac{6}{x} - 3 \neq 0$ .

**11.** Τονίζουμε ότι, για να γίνει απλοποίηση σ' ένα κλάσμα, πρέπει και ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι γινόμενα, και στα γινόμενα αυτά να υπάρχει κοινός (= ο ίδιος) παράγοντας, ο οποίος και απλοποιείται (παραλείπεται).

Αν ο ένας (τουλάχιστον) από τους όρους του κλάσματος δεν είναι γινόμενο, τότε στο κλάσμα αυτό δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση. Έτσι:

- στο κλάσμα  $\frac{a\beta + \gamma}{a\delta}$  δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση του  $a$  (ο αριθμητής δεν είναι γινόμενο · το  $a$  είναι παράγοντας του όρου  $a\beta$ , αλλά δεν είναι παράγοντας σε όλο τον αριθμητή).
- στο κλάσμα  $\frac{a\beta}{a\gamma + \delta}$  δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση του  $a$  (ο παρονομαστής δεν είναι γινόμενο).
- το κλάσμα  $\frac{a\beta + a\gamma}{a\delta}$  δεν είναι ίσο με  $\frac{\beta + a\gamma}{\delta}$ , ούτε με  $\frac{a\beta + \gamma}{\delta}$ .

$$\text{Ισχύει όμως } \frac{a\beta + a\gamma}{a\delta} = \frac{a(\beta + \gamma)}{a\delta} = \frac{\beta + \gamma}{\delta}.$$

**Γενικά, για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα, πρέπει τώρα να παραγοντοποιήσουμε και τους δύο όρους του.**

Στο κλάσμα  $\frac{2(a + \beta)}{a + \beta}$  μπορεί να γίνει απλοποίηση του  $a + \beta$ , αφού και ο αριθμητής και ο παρονομαστής μπορούν να γραφούν σε μορφή γινομένου, έτσι ώστε το  $a + \beta$  να αποτελεί παράγοντα και των δύο όρων.

Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta} = \frac{2 \cdot (\alpha + \beta)}{1 \cdot (\alpha + \beta)} = \frac{2}{1} = 2.$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης A τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη B, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\frac{1}{4x}$	1. $x \neq 3$
β. $\frac{x+2}{x-2}$	2. $x \neq 2$ και $x \neq -2$
γ. $\frac{x+3}{(x-2)(x+2)}$	3. $x \neq 0$
δ. $\frac{2(x-3)}{x-3}$	4. Οποιοσδήποτε αριθμός
	5. $x \neq -2$
	6. $x \neq 4$
	7. $x \neq 2$

α	β	γ	δ

13. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης A τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη B, για τις οποίες δεν ορίζεται.

Στήλη A	Στήλη B
α. $\frac{2}{x}$	1. $x = 0$
β. $\frac{3x-3}{x+1}$	2. $x = 2$
γ. $\frac{2x}{x^2-1}$	3. $x = 1$
δ. $\frac{5(x-1)}{x-1}$	4. $x = 3$
	5. $x = -1$
	6. $x = 5$
	7. $x = 1$ ή $x = -1$

α	β	γ	δ



14. Σε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες, να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (Λανθασμένη).

$$\alpha) \frac{x^2 + 2}{2x} = x \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\beta) \frac{x(x + 2)}{2x} = \frac{x + 2}{2} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\gamma) \frac{(x + 3)(x + 5)}{2(x + 3)} = \frac{x + 5}{2} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\delta) \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha + \beta} = \alpha - \beta \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\epsilon) \frac{x + 3(x - 2)}{5(x - 2)} = \frac{x + 3}{5} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\sigma\tau) \frac{(\alpha - \beta)^3}{2(\alpha - \beta)} = \frac{3}{2} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\zeta) \frac{2(\alpha - \beta)^2}{(\alpha - \beta)} = 2(\alpha + \beta) \quad \Sigma \quad \Lambda$$

15. Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες:

$$\alpha) \frac{5x}{x(\dots)} = \frac{5}{x - 1} \quad \beta) \frac{2(\alpha + 3\beta) \cdot (\dots)}{(\alpha - 3\beta) \cdot (\dots)} = 2$$

$$\gamma) \frac{x(x + 2)}{\dots} = x + 2 \quad \delta) \frac{x^2 - 4}{\dots} = x + 2$$

$$\epsilon) \frac{3(\dots)}{4(\alpha - \beta)^2} = \frac{3}{4(\alpha - \beta)} \quad \sigma\tau) \frac{2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2)}{3(\dots)^2} = \frac{2(\alpha - \beta)}{3(\alpha + \beta)}$$

$$\zeta) \frac{2(x + 1)}{\dots} = \frac{2}{x + 1} \quad \eta) \frac{3(\dots)}{(x + 2)^2} = \frac{3}{x + 2}$$

## Ασκήσεις και προβλήματα για λύση

16. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{1}{1 - 3} \quad \beta) \frac{y + 5}{2y - 7} \quad \gamma) \frac{\omega - 3}{(\omega - 2)^2}$$

$$\delta) \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + 3)^2} \quad \epsilon) \frac{7x + 12}{x(x - 1)} \quad \sigma\tau) \frac{6x + 5}{(x - 1)(x + 2)}$$

17. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 5x + 13}{x} \quad \beta) \frac{x^2 + 7}{x - 2} \quad \gamma) \frac{x^3 + 5}{x + 3}$$

$$\delta) \frac{x^2 - 8}{x(x + 4)} \quad \epsilon) \frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x + 3)} \quad \sigma\tau) \frac{x^2 + y^2}{x - 2y}$$

18. Να βρείτε τις τιμές μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x} \quad \beta) \frac{y}{x - 3} \quad \gamma) \frac{3a}{2x - 1}$$

$$\delta) \frac{5\beta}{2x + 3} \quad \epsilon) \frac{\alpha - \beta}{5a - 3} \quad \sigma\tau) \frac{5x + 20}{(x - 3)(3x + 4)}$$

$$\zeta) \frac{1}{\frac{x-1}{x}}$$

19. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{1}{2x} \quad \beta) \frac{\alpha}{2 - x} \quad \gamma) \frac{3x}{2\alpha + 1}$$

$$\delta) \frac{x - y}{1 - 3\alpha} \quad \epsilon) \frac{x + y}{(x - 3)^2} \quad \sigma\tau) \frac{3x - 1}{(2x - 1)(1 - 4x)} \quad \zeta) \frac{2}{\frac{x}{x - 2}}$$

20. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{20}{y} \quad \beta) \frac{\alpha - 2}{2 - \alpha} \quad \gamma) \frac{4x}{4x - 1}$$

$$\delta) \frac{3x}{1 - 5x} \quad \epsilon) \frac{1}{(x - 1)(3x + 7)} \quad \sigma\tau) x/x^2 - 1 \quad \zeta) \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x}}$$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{3x}{5x} \quad \beta) \frac{7\omega}{28\omega^3} \quad \gamma) \frac{10\alpha\beta}{40\beta^2}$$

$$\delta) \frac{2x^5}{16x^3} \quad \epsilon) \frac{5(x + 1)^3}{10(x + 1)^5} \quad \sigma\tau) \frac{3(\beta + 2)^2}{6(\beta + 2)^3}$$

22. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{60x^2}{90x} \quad \beta) \frac{6\alpha\beta^2}{2\alpha\beta^3\gamma} \quad \gamma) \frac{-24\alpha^5x^3y^2}{-30\alpha^5xy^4}$$

$$\delta) \frac{4\alpha - 4\beta}{3\beta - 3\alpha}$$

$$\epsilon) \frac{8x^2 - 2xy}{4xy - y^2}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^4 - x^2}{x^3 + x^2}$$

23. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{2\alpha - 6}{\alpha^2 - 3\alpha}$$

$$\beta) \frac{\alpha - 2}{4 - \alpha^2}$$

$$\gamma) \frac{x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\delta) \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x}$$

$$\epsilon) \frac{2y^2 - 32}{16 - 8y + y^2}$$

$$\sigma\tau) \frac{3x^4 - 3y^4}{x^2 + 2xy + y^2}$$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{5x - 10}{x^2 - 4}$$

$$\beta) \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}$$

$$\gamma) \frac{\alpha\beta + \beta\alpha}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}$$

25. Να γίνουν οι απλοποιήσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha^5\beta^3\gamma^6 - \alpha^2\beta^3\gamma^4}{\alpha^2\beta^3\gamma^4 - \alpha^4\beta^3\gamma^5}$$

$$\beta) \frac{x^2 - x\sqrt{12} + 3}{2x^2 - x\sqrt{12}}$$

26. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha(\alpha - 3) + 4(\alpha - 3)}{\alpha^2 - 9}$$

$$\beta) \frac{2\alpha - 2\beta + \alpha x - \beta x}{\beta^2 - \alpha\beta}$$

$$\gamma) \frac{2\mu^2 - 18\nu^2}{2\mu^2 + 12\mu\nu + 18\nu^2}$$

$$\delta) \frac{4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma}{2\alpha\beta - 2\beta^2 + 2\beta\gamma}$$

$$\epsilon) \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha^2 - \alpha - 20}{\alpha^2 - 25}$$

27. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha\beta - \alpha}{\beta^2 - \beta}$$

$$\beta) \frac{\alpha\beta + \beta}{\beta^2}$$

$$\gamma) \frac{x^3 + x^2y + x^2\omega}{x^2y^2 + xy^3 + xy^2\omega}$$

$$\delta) \frac{x(x + 1) + 2(x + 1)}{x^3 + 8}$$

$$\epsilon) \frac{\alpha^2 + \alpha - 12}{\alpha^2 - 9}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

28. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\beta) \frac{(2x - 3y)^2}{9y^2 - 4x^2}$$

$$\gamma) \frac{3\alpha^3\beta + 3\alpha\beta^3 - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha^3\beta - 6\alpha\beta^3}$$

$$\delta) \frac{x^3 - 2x^2 + 2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\epsilon) \frac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^4 - \alpha\beta^3}$$

$$\sigma\tau) \frac{\alpha^4\gamma - \beta^4\gamma}{2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - 2\beta^3}$$

29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{(x^2 - 1)^2}{(2x + 2)^2}$$

$$\beta) \frac{x^2 - y + xy - x}{x^3y + 2x^2y^2 + xy^3}$$

$$\gamma) \frac{x^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2 - x^2 + 2\beta x}$$

30. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - 5}{2x + \sqrt{20}}$$

$$\beta) \frac{x^2 - x\sqrt{12} + 3}{x\sqrt{3} - 3}$$

31. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{6xy^3 + 6x^3y + 12x^2y^2}{3xy^3 - 3x^3y}, \quad \beta) \frac{\alpha^4x - \beta^4x}{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}$$

32. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{4 + 8 + 12 + \dots + 400}{3 + 6 + 9 + \dots + 300}$$

$$\beta) \frac{4x + 8x + 12x + \dots + 400y}{3x + 6x + 9x + \dots + 300x}$$

## A.1.10.A.

## Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

## 01 Πολλαπλασιασμός

- Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο ρητών παραστάσεων γίνεται όπως και ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων, σύμφωνα με τον τύπο  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

## ... Παράδειγμα

$$\frac{3}{x^2} \cdot \frac{x+2}{x-4} = \frac{3 \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-4)} = \frac{3x+6}{x^3-4x^2}$$

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός μιας πολυωνυμικής με μια ρητή παράσταση γίνεται σύμφωνα με τους τύπους  $\lambda \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\beta}$  και  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \mu = \frac{\alpha \cdot \mu}{\beta}$

## ... Παραδείγματα

$$\begin{aligned} \bullet & \frac{3x^2}{x-10} \cdot \frac{4x}{x-10} = \frac{3x^2 \cdot 4x}{x-10} = \frac{12x^3}{x-10} \\ \bullet & \frac{3x^2}{x-1} \cdot 2x = \frac{3x^2 \cdot 2x}{x-1} = \frac{6x^3}{x-1} \end{aligned}$$

## 02 Διαίρεση

- Η διαίρεση δυο ρητών παραστάσεων γίνεται όπως και η διαίρεση κλασμάτων, σύμφωνα με τον τύπο  $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

## ... Παραδείγματα

$$\begin{aligned} \bullet & \frac{3x}{2a} : \frac{4y}{5\beta} = \frac{3x}{2a} \cdot \frac{5\beta}{4y} = \frac{3x \cdot 5\beta}{2a \cdot 4y} = \frac{15\beta x}{8ay} \\ \bullet & \frac{3}{x-1} : \frac{2x}{5x+10} = \frac{3}{x-1} \cdot \frac{5x+10}{2x} = \frac{3 \cdot (5x+10)}{(x-1) \cdot 2x} = \frac{15x+30}{2x^2-2x} \\ \bullet & \text{Επίσης, ισχύουν: } \frac{\alpha}{\beta} : \lambda = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\lambda}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot \lambda} = \frac{\alpha}{\beta \lambda} \\ \mu : \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\mu}{1} : \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\mu \cdot \beta}{1 \cdot \alpha} = \frac{\mu\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

## ... Παραδείγματα

$$\bullet \frac{2xy}{3a} : 5a^2\beta^4 = \frac{2xy}{3a} : \frac{5a^2\beta^4}{1} = \frac{2xy}{3a} \cdot \frac{1}{5a^2\beta^4} = \frac{2xy \cdot 1}{3a \cdot 5a^2\beta^4} = \frac{2xy}{15a^3\beta^4}$$

- $\frac{3x+y}{x-2} : 5x^2 = \frac{3x+y}{x-2} \cdot \frac{5x^2}{1} = \frac{3x+y}{x-2} \cdot \frac{1}{5x^2} = \frac{3x+y}{(x-2)} \cdot 5x^2 = \frac{3x+y}{5x^3 - 10x^2}$
- $3x^2y : \frac{2\alpha\beta}{5x^3} = \frac{3x^2y}{1} \cdot \frac{5x^3}{2\alpha\beta} = \frac{3x^2y \cdot 5x^3}{1 \cdot 2\alpha\beta} = \frac{15x^5y}{2\alpha\beta}$

**Σχόλιο:** Συνήθως, μετά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση δύο ρητών παραστάσεων γράφουμε το αποτέλεσμα σε όσο γίνεται απλούστερη μορφή, κάνοντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

### 03 Σύνθετα κλάσματα

► Ένα κλάσμα του οποίου ο ένας τουλάχιστον όρος είναι επίσης κλάσμα, λέγεται **σύνθετο κλάσμα**.

► Ένα σύνθετο κλάσμα έχει τη μορφή  $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$  ή  $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}$  ή  $\frac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}}$

Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό ως εξής:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} = \frac{\text{γινόμενο των «άκρων» όρων } \alpha, \delta}{\text{γινόμενο των «μέσων» όρων } \beta, \gamma}$$

$$\text{Αυτό ισχύει διότι } \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \frac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot \gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{1 \cdot \gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{1 \cdot \gamma} = \frac{\alpha\delta}{\gamma}$$

#### ... Παραδείγματα

- $\frac{\frac{5x}{3\alpha}}{\frac{2y}{7\beta}} = \frac{5x \cdot 7\beta}{3\alpha} \cdot \frac{1}{2y} = \frac{35x\beta}{6\alpha y}$
- $\frac{\frac{5x}{3\alpha}}{\frac{2\beta}{1}} = \frac{5x}{3\alpha} = \frac{5x}{3\alpha \cdot 2\beta} = \frac{5x}{6\alpha\beta}$
- $\frac{5x}{\frac{3\alpha}{2\beta}} = \frac{5x}{\frac{1}{3\alpha}} = \frac{5x \cdot 2\beta}{3\alpha} = \frac{10x\beta}{3\alpha}$

## ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**04** Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \left(-\frac{x^2}{5\alpha}\right) \quad \beta) \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{2x + 2y}{x + 2y}$$

## ΛΥΣΗ

$$\alpha) \frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \left(-\frac{x^2}{5\alpha}\right) = -\frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \frac{x^2}{5\alpha} = -\frac{10\alpha \cdot x^2}{x^{10} \cdot 5\alpha} = -\frac{2 \cdot 5\alpha \cdot x^2}{x^2 \cdot x^8 \cdot 5\alpha} = -\frac{2}{x^8}$$

$$\begin{aligned} \beta) \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{2x + 2y}{x + 2y} &= \frac{x^2 - (2y)^2}{x(x+y)} \cdot \frac{2(x+y)}{x+2y} = \frac{(x+2y)(x-2y)2(x+y)}{x(x+y)(x+2y)} = \\ &= \frac{(x-2y)2}{x} = \frac{2x-4y}{x} \end{aligned}$$

**05** Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{6}{x^2 - y^2} : \frac{-3}{x + y} \quad \beta) \frac{\frac{\alpha^2 - 4\alpha}{x^3 - xy^2}}{\frac{\alpha^3 - 16\alpha}{x^2y + x^3}}$$

## ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{6}{x^2 - y^2} : \frac{-3}{x + y} &= \frac{6}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x + y}{-3} = \frac{6(x + y)}{-3(x^2 - y^2)} = \frac{3 \cdot 2(x + y)}{-3(x + y)(x - y)} = \\ &= \frac{2}{-(x - y)} = \frac{2}{y - x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \frac{\frac{\alpha^2 - 4\alpha}{x^3 - xy^2}}{\frac{\alpha^3 - 16\alpha}{x^2y + x^3}} &= \frac{(\alpha^2 - 4\alpha) \cdot (x^2y + x^3)}{x^3 - xy^2} \cdot \frac{1}{(\alpha^3 - 16\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha - 4)x^2(y + x)}{x(x^2 - y^2)\alpha(\alpha^2 - 16)} = \\ &= \frac{\alpha(\alpha - 4)x^2(y + x)}{x(x + y)(x - y)\alpha(\alpha + 4)(\alpha - 4)} = \frac{x}{(x - y)(\alpha + 4)} \end{aligned}$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

6. Για καθεμία από τις παρακάτω ισότητες να σημειώσετε το Σ(σωστή) ή το Λ (Λανθασμένη).

α) $\alpha \cdot \frac{x}{y} = \frac{\alpha x}{\alpha y}$	Σ	Λ
β) $\alpha \cdot \frac{x}{y} = \frac{\alpha x}{y}$	Σ	Λ
γ) $4x : \frac{3}{xy} = \frac{15}{y}$	Σ	Λ
δ) $5x : \frac{3}{xy} = \frac{5x^2 y}{3}$	Σ	Λ
ε) $\frac{\alpha - \beta}{\gamma} \cdot \frac{\delta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma}{\delta}$	Σ	Λ
στ) $\frac{3}{\alpha} \cdot \frac{x-1}{\alpha} = \frac{3x-1}{\alpha^2}$	Σ	Λ
ζ) $\frac{2x}{\alpha + \beta} \cdot \frac{3(\alpha + \beta)}{2x} = 3$	Σ	Λ
η) $\frac{x}{y + \omega} : \frac{x}{y + \omega} = 1$	Σ	Λ

7. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α)  $5x \cdot \frac{\dots}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$       β)  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\dots}{\delta} = \frac{\alpha\beta}{\delta}$

γ)  $\frac{5\alpha}{\beta} : \frac{\dots}{\delta} = \frac{\delta}{2\beta}$       δ)  $\frac{x+y}{x-\omega} \cdot \frac{\dots}{\dots} = 1$

ε)  $\frac{x-y}{x+\omega} : \frac{\dots}{\dots} = 1$     στ)  $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha+\beta}{\dots} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α στο αποτέλεσμα της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{x}$	1. $\frac{4}{5y}$
β. $\frac{16x}{5y} \cdot \frac{1}{4x}$	2. $\frac{y^2}{2x^2}$
γ. $\frac{10x}{y} : \frac{12}{x}$	3. $\frac{y^2}{x^2}$
δ. $\frac{y}{x^2} : \frac{2}{y}$	4. $\frac{1}{xy}$
	5. $\frac{6y}{5x^2}$
	6. $\frac{5x^2}{6y}$

α	β	γ	δ



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

9. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^3}$

β)  $\frac{4x}{5y} \cdot \frac{5x}{2y}$

γ)  $\frac{10}{5a^2 \cdot 3a^3}$

δ)  $-\frac{4a}{5} \cdot \left(-\frac{3a}{2}\right)$

ε)  $\frac{2}{15a} \cdot \left(-\frac{3\beta}{2}\right)$

στ)  $-\frac{7}{5a} \cdot \left(-\frac{5}{14a}\right)$

10. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{-5a}{3\beta\gamma} \cdot \frac{6\beta^2\gamma^2}{3a^2}$

β)  $\frac{16xy^2 \cdot x^3}{8y^4}$

γ)  $\frac{-a^2}{3\beta} \cdot \frac{-9a\beta}{5\gamma^2\delta} \cdot \frac{12\beta\gamma\delta}{-a^4}$

δ)  $(a+5) \cdot \frac{a^2\beta}{a^2-25}$

ε)  $\frac{a-2}{\beta-a} \cdot \frac{\beta^2-a\beta}{4-a^2}$

στ)  $\frac{a+1}{a+\beta} \cdot \frac{\beta^2+a\beta}{1-a^2}$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{3x}{5y} \cdot \frac{4x^5}{y}$

β)  $\frac{x^2-16}{3+x} \cdot \frac{x^2-9}{x+4}$

γ)  $\frac{3a^2+2a\beta}{x} \cdot \frac{x}{5a^2}$

δ)  $(a-\beta)^2 \cdot \left[\frac{-1}{(a-\beta)^3}\right]$

ε)  $\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{2x^2-4xy+2y^2}{3x+3y}$

στ)  $\frac{a}{4\beta} \cdot \frac{3(2a+\beta)}{a} \cdot \frac{6\beta}{12(a+2\beta)}$

12. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{1}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{2}$

β)  $\frac{(a^2-\beta^2) \cdot 1}{a-\beta}$

γ)  $\frac{x^2-xy}{y^2} \cdot \frac{y}{x^2}$

δ)  $\frac{y^2+2y\omega+\omega^2}{4y-\omega} \cdot \frac{16y^2-\omega^2}{(y+\omega)^3}$

ε)  $\frac{a^2-4}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{a-2}$

στ)  $\frac{a^2-\beta^2}{a^2-\gamma^2} \cdot \frac{a+\gamma}{a-\beta}$

13. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\alpha - 2\beta}{\alpha + 3\beta} \cdot \frac{\alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2}{2\alpha - 4\beta} \quad \beta) \frac{5x - y}{5x} \cdot \frac{14y}{x - 5y} \cdot \frac{10x}{7y}$$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\alpha^v - 1}{x^{2v}} \cdot \frac{x^{2v}}{\alpha^{2v} - 1} \quad \beta) \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{1 - x^2}$$

$$\gamma) \frac{5\alpha - 3\beta}{7\gamma^2} \cdot \frac{21\alpha\gamma - 21\alpha\gamma - 21\beta\gamma}{5\alpha x - 3\beta x + 5\alpha\gamma - 3\beta\gamma} \cdot \frac{x + y}{3}$$

15. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{8}{18x^2} : 12x^3 \quad \beta) \frac{40}{x} : 8x \quad \gamma) 3y : \frac{y^2}{6}$$

$$\delta) \frac{\alpha^2}{\beta^3} : \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \epsilon) (4\alpha^2\beta + 16\alpha^2 + 20\alpha^3) : 4\alpha \quad \sigma\tau) (56x - 64y + 32y^2) : (-8xy)$$

16. Να κάνετε τις διαιρέσεις

$$\alpha) \frac{100}{a} : 20 \quad \beta) 50 : \frac{2}{a} \quad \gamma) \frac{6a^2 + 3a}{4a^2 + 4a + 1} : \frac{9a}{16a^2 - 4}$$

17. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{3x^2}{2y^2} : \frac{9x^2}{4y^3} \quad \beta) \frac{4x^3}{9y^2} : \frac{2x}{9y^4} \quad \gamma) \frac{-3a^2}{4\beta^2x} : \frac{-5\beta}{6x}$$

$$\delta) \left( \frac{4ay^2}{-3x^2} : \frac{6a}{-5y} \right) : \frac{5y^3}{4x} \quad \epsilon) (11a\beta^2 + 22a^2\beta^2 - 121a^3\beta) : (-11a\beta^2)$$

$$\sigma\tau) \left( \frac{7x^3}{6a\beta} + \frac{14x^2}{9\beta^2} - \frac{21x}{3a^2} \right) : \frac{7x}{3a}$$

18. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha - \beta}{4} : \frac{\alpha - \beta}{6} \quad \beta) \frac{3x^3}{x + y} : \frac{2y^2}{x + y} \quad \gamma) \frac{1}{\beta^2 - \alpha^2} : \frac{-4}{\alpha - \beta}$$

$$\delta) \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} : \frac{\alpha^2 - \alpha\beta}{-3\beta} \quad \epsilon) \frac{15x^2 + 5x}{1 + 6x + 9x^2} : \frac{10x}{27x^2 - 3}$$

19. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} : \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3} \quad \beta) \frac{2\alpha}{\alpha - \beta} : \frac{4\beta^2}{\alpha - \beta} \quad \gamma) \frac{x^2 + 2x}{\alpha^2} : (x^2 - 4)$$

$$\delta) (\alpha^3 - \beta^3) : \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} \quad \epsilon) \left( \frac{x^2 - 4}{x - 3} : \frac{x^3 - 8}{x^2 - 6x + 9} \right) : \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x}$$

20. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{x^3 - xy^2}{\alpha\beta^2 - \alpha y^2} \cdot \frac{\alpha y + \alpha\beta}{x^2 - xy} \quad \beta) \frac{x^2 - 2xy}{xy + 6y^2} : \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 6xy}$$

21. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left( \frac{\alpha^2 - 6\alpha + 9}{\alpha^2 - 2\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - 4}{\alpha - 3} \right) : \frac{\alpha^2 - \alpha - 6}{\alpha^2 + \alpha}$$

$$\beta) \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{x + y} : \frac{3(3x - y)^2}{x^2 - y^2}$$

22. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}}{\frac{2\alpha - 2\beta}{\alpha + \beta}} \quad \beta) \frac{\frac{x^2 - 2x}{y\omega^2 - \omega^3}}{\frac{x^2 - 4}{y\omega^2 - y^3}} \quad \gamma) \left( \frac{5\alpha}{2\beta} \right)^3 : \left( \frac{25\alpha^2}{8\beta^5 x} : \frac{60\alpha\beta}{75x^2} \right)$$

23. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left[ \frac{8(x + y)^2}{5(x - y)^3} : \frac{2(x + y)^3}{(x - y)^2} \right] \cdot (x^2 - y^2) \quad \beta) \left[ \frac{8(x + y)^2}{5(x - y)^2} : \frac{2(x + y)^3}{(x - y)^2} \right] \cdot (x^2 - y^2)$$

24. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\alpha^2 + \alpha x + \alpha y + xy}{\alpha^2 - \alpha x - \alpha y + xy} : \frac{\alpha^2 - \alpha x + \alpha y - xy}{\alpha^2 + \alpha x - \alpha y - xy} \quad \beta) \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} : \frac{\frac{x^2 + y^2 - xy}{xy^2}}{\frac{x - y}{xy}}$$

$$\gamma) \frac{\alpha^4 - \beta^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} \cdot \frac{x^2 - y^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

## A.10.B

## Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

**01** Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων που έχουν τον ίδιο παρονομαστή

Η πρόσθεση και η αφαίρεση ρητών παραστάσεων που έχουν τον ίδιο παρονομαστή γίνονται όπως και η πρόσθεση και η αφαίρεση ομώνυμων κλασμάτων, σύμφωνα με τους τύπους:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

••• Παραδείγματα

- $\frac{3x}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{3x+4}{x+1}$
- $\frac{2x-1}{x-2} + \frac{x-4}{x-2} = \frac{2x-1+x-4}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2}$
- $\frac{5\alpha}{\alpha+2} - \frac{2\beta}{\alpha+2} = \frac{5\alpha-2\beta}{\alpha+2}$
- $\frac{3x+4}{x-1} - \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3x+4-(2x+1)}{x-1} = \frac{3x+4-2x-1}{x-1} = \frac{x+3}{x-1}$

**02** Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων που δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή

Στην περίπτωση αυτή, μετατρέπουμε πρώτα τα κλάσματα σε ομώνυμα:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\overset{\delta}{\alpha}}{\beta} + \frac{\overset{\beta}{\gamma}}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \delta} + \frac{\gamma \cdot \beta}{\delta \cdot \beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\delta} + \frac{\gamma\beta}{\delta\beta} = \frac{\alpha\delta + \gamma\beta}{\beta\delta}$$

••• Παραδείγματα

- $\frac{4}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{\overset{x}{4}}{x+2} - \frac{\overset{x+2}{2}}{x} = \frac{4 \cdot x}{(x+2) \cdot x} - \frac{2 \cdot (x+2)}{x \cdot (x+2)} =$   
 $\frac{4x - 2(x+2)}{x(x+2)} = \frac{4x - 2x - 4}{x(x+2)} = \frac{2x - 4}{x(x+2)}$
- $\frac{\overset{x}{5}}{3x} + \frac{\overset{3}{4}}{x^2} = \frac{5 \cdot x}{3x \cdot x} + \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot x^2} = \frac{5x}{3x^2} = \frac{5x}{3x^2} + \frac{12}{3x^2} = \frac{5x+12}{3x^2}$

Γενικά, μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Γενικός τρόπος	Παράδειγμα
	<p>Να υπολογιστεί το άθροισμα:</p> $\frac{x+1}{x^2+4x+4} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x}$
1. Παραγοντοποιούμε τους παρανομαστές.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2</math></li> <li>• <math>x + 2 = x + 2</math></li> <li>• <math>x^2 + 2x = x(x + 2)</math></li> </ul>
2. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών	$x \cdot (x + 2)^2$
3. Βρίσκουμε τα πηλίκα του ΕΚΠ αυτού με κάθε παρανομαστή.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{x(x+2)^2}{(x+2)^2} = x</math></li> <li>• <math>\frac{x(x+2)^2}{x+2} = x(x+2)</math></li> <li>• <math>\frac{x(x+2)^2}{x(x+2)} = x+2</math></li> </ul>
4. Πολλαπλασιάζουμε τους όρους κάθε κλάσματος με το αντίστοιχο πηλίκο και εκτελούμε τις τελικές πράξεις:	$\begin{aligned} & \frac{x+1}{x^2+4x+4} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x^2+2x} = \\ & = \frac{x+1}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} - \frac{1}{x(x+2)} = \\ & = \frac{(x+1) \cdot x}{(x+2)^2 \cdot x} + \frac{x \cdot x(x+2)}{(x+2) \cdot x(x+2)} - \\ & \quad - \frac{1 \cdot (x+2)}{x(x+2) \cdot (x+2)} = \\ & = \frac{x \cdot (x+1)}{x(x+2)^2} + \frac{x^2(x+2)}{x(x+2)^2} - \frac{x+2}{x(x+2)^2} = \\ & = \frac{x(x+1) + x^2(x+2) - (x+2)}{x(x+2)^2} = \\ & = \frac{x^2 + x + x^3 + 2x^2 - x - 2}{x(x+2)^2} = \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x(x+2)^2} \end{aligned}$

Έστω ακόμη, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα  $\frac{3}{24a^2} + \frac{5}{18(a^2 - a)}$ . Τότε:

1. Οι παρανομαστές είναι  $24a^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot a^2$  και  $18(a^2 - a) = 2 \cdot 3^2 \cdot a \cdot (a - 1)$ .
2. Το ΕΚΠ των παρανομαστών είναι  $2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2(a - 1)$ .
3. Τα πηλίκα αυτού του ΕΚΠ με κάθε παρανομαστή είναι:

$$\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot (a - 1)}{2^3 \cdot 3 \cdot a^2} = 3(a - 1) \quad \text{και} \quad \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot (a - 1)}{2 \cdot 3^2 \cdot a \cdot (a - 1)} = 2^2 a$$

4. Έχουμε:  $\frac{3}{24a^2} + \frac{5}{18(a^2 - a)} = \frac{3}{2^3 \cdot 3 \cdot a^2} + \frac{5}{2 \cdot 3^2 \cdot a \cdot (a - 1)} =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3 \cdot 3 \cdot (\alpha - 1)}{2^3 \cdot 3 \cdot \alpha^2 \cdot 3 \cdot (\alpha - 1)} + \frac{5 \cdot 2^2 \cdot \alpha}{2 \cdot 3^2 \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot 2^2 \cdot \alpha} = \\
 &= \frac{9(\alpha - 1)}{72\alpha^2(\alpha - 1)} + \frac{20\alpha}{72\alpha^2(\alpha - 1)} = \frac{9(\alpha - 1) + 20\alpha}{72\alpha^2(\alpha - 1)} = \\
 &= \frac{9\alpha - 9 + 20\alpha}{72\alpha^2(\alpha - 1)} = \frac{29\alpha - 9}{72\alpha^2(\alpha - 1)}
 \end{aligned}$$

## ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

3. Θυμίζουμε ότι, για να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε δύο κλάσματα, δε χρειάζεται αυτά να είναι ομώνυμα. Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε όμως δύο κλάσματα, είναι απαραίτητο να τα κάνουμε πρώτα ομώνυμα (αν δεν είναι ήδη) και μετά να εκτελέσουμε την πράξη (πρόσθεση ή αφαίρεση) που έχουμε.

4. Αν θέλουμε να προσθέσουμε ένα κλάσμα με μια παράσταση που δεν είναι κλάσμα, θεωρούμε την παράσταση αυτή ως κλάσμα με παρονομαστή τη μονάδα. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \frac{3}{\alpha} + x^2 &= \frac{3}{\alpha} + \frac{x^2}{1} = \frac{3}{\alpha} + \frac{\alpha x^2}{\alpha} = \frac{3 + \alpha x^2}{\alpha} \\
 \bullet \quad 3x - \frac{4}{x-1} &= \frac{3x}{1} - \frac{4}{x} - 1 = \frac{3x \cdot (x-1)}{1 \cdot (x-1)} - \frac{4}{x-1} = \\
 &= \frac{3x^2 - 3x}{x-1} - \frac{4}{x-1} = \frac{3x^2 - 3x - 4}{x-1}
 \end{aligned}$$

5. Για να εκτελέσουμε την πρόσθεση ή την αφαίρεση δύο κλασμάτων που δεν είναι ομώνυμα, μπορούμε, αντί για το ΕΚΠ των παρονομαστών να χρησιμοποιήσουμε ένα οποιοδήποτε κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, π.χ. το γινόμενο τους. Μόνο που τότε, ενδεχομένως, να χρειαστούν αρκετά περισσότερες πράξεις.

6. Προσοχή στο συνηθισμένο λάθος

$$\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\kappa + \lambda}{\beta} = \frac{\alpha - \kappa + \lambda}{\beta} \left[ \text{το σωστό είναι } \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\kappa + \lambda}{\beta} = \frac{\alpha - \kappa - \lambda}{\beta} \right].$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

7. Σε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη).

$$\alpha) \frac{x+1}{x+3} + \frac{2}{x+3} = 1 \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\beta) \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{x+y} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\gamma) \frac{\alpha+3\beta}{\alpha+\beta} - \frac{2\beta}{\alpha+\beta} = 1 \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\delta) \frac{5}{x-y} + \frac{5}{y-x} = 0 \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\epsilon) \frac{2}{3} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2+\alpha}{3+\beta} \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\sigma\tau) \frac{5}{\alpha} - \frac{\alpha+5}{\alpha} = -1 \quad \Sigma \quad \Lambda$$

$$\zeta) \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\beta}{\beta-\alpha} = 1 \quad \Sigma \quad \Lambda$$

8. Το αποτέλεσμα της πράξης  $\frac{4x+3}{x-1} - \frac{3x-2}{x-1}$  είναι:

$$\alpha) \frac{x+5}{x-1}, \quad \beta) 1, \quad \gamma) \frac{x-1}{x-5}, \quad \delta) \frac{7x+5}{x-1}$$

9. Το αποτέλεσμα της πράξης  $\frac{\alpha\gamma}{\alpha-\beta} + \frac{\beta\gamma}{\beta-\alpha}$  είναι:

$$\alpha) -\gamma, \quad \beta) \frac{(\alpha+\beta)\gamma}{\alpha-\beta}, \quad \gamma) \gamma, \quad \delta) \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

10. Αν  $\alpha + \beta = \beta$  και  $\alpha\beta = 6$  τότε το άθροισμα  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$  είναι ίσο με:

$$\alpha) \frac{3}{4}, \quad \beta) \frac{4}{3}, \quad \gamma) 14, \quad \delta) 2$$

11. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) \frac{2x}{x+3} - \dots = 0 \quad \beta) \frac{2x}{x+3} + \dots = 2$$

$$\gamma) \dots + \frac{x+1}{x+3} = \frac{2x}{x} + 3$$

$$\delta) \dots - \frac{4}{x+5} = \frac{5}{x+5}$$

$$\epsilon) \frac{3x-2}{x} + \dots = 3$$

$$\sigma\tau) \frac{3x+8}{x+1} - \dots = 3$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

12. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$$

$$\beta) \frac{1}{3 + 1/\alpha}$$

$$\gamma) \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\delta) \frac{7+3}{x}$$

$$\epsilon) \frac{3}{\omega - 2}$$

$$\sigma\tau) \frac{x^2 + 5x - 7}{5x - 3} - \frac{x^2 - 10x + 2}{5x - 3}$$

13. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\alpha}{4\beta} + \frac{\beta}{12}$$

$$\beta) \frac{x}{3y} - \frac{\omega}{27}$$

$$\gamma) \frac{x}{5\alpha} + \frac{y}{3\alpha\beta}$$

$$\delta) \frac{\alpha}{2x} - \frac{2\beta}{xy}$$

$$\epsilon) \frac{3}{\alpha} - \frac{x}{\alpha\beta}$$

$$\sigma\tau) \frac{1}{\kappa} - \frac{3}{\kappa^2}$$

14. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{5}{\alpha^2} - \frac{3}{\alpha}$$

$$\beta) \frac{1}{R^2} - \frac{\rho}{R^3}$$

$$\gamma) \frac{x}{8y} - \frac{1}{4xy}$$

$$\delta) \frac{\alpha}{5x^2} - \frac{2}{xy}$$

$$\epsilon) \frac{\alpha\beta}{6xy^2\omega} + \frac{x}{4\alpha\gamma\omega^2}$$

$$\sigma\tau) \frac{x}{12\alpha^2\beta\gamma} - \frac{4\gamma}{15\alpha\beta^2\gamma^3}$$

15. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}$$

$$\beta) \frac{5}{x} - \frac{3}{x+2}$$

$$\gamma) \frac{\frac{3}{x} - 1 - 2}{x+1}$$

$$\delta) \frac{10}{x+1} - \frac{10}{x+5}$$

16. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{3}{2x} + \frac{7}{2x}$$

$$\beta) \frac{17}{-3\alpha} + \frac{2}{3\alpha} \quad \gamma) \frac{2x-6}{2} - \frac{x-4}{6} - \frac{4x-9}{3}$$

$$\delta) \frac{x-3}{4xy} - \frac{3-x}{6xy}$$

17. Να κάνετε τις πράξεις:



α)  $\frac{5}{x} + \frac{2}{-x}$

β)  $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{1-x}$

γ)  $\frac{3x}{2x-1} + \frac{x-1}{1-2x}$

18. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$

β)  $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)}$

γ)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$

19. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $1 + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a}$

β)  $\frac{1}{a\beta + \beta^2} - \frac{1}{(a + \beta)^2}$

γ)  $\frac{2}{x-y} - \frac{4y}{x^2-y^2}$

δ)  $\frac{a + \beta}{2(a - \beta)} + \frac{a - \beta}{2(a + \beta)}$

20. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{2x - 2y}{x + y} + \frac{3x + 3y}{x - y} - \frac{5x^2 + 5y^2}{x^2 - y^2}$$

21. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $x - \frac{5-x^2}{x}$

β)  $\frac{\beta}{a\gamma} - \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha\beta}$

γ)  $\frac{\alpha}{a-2\beta} - \frac{2\beta}{a+2\beta} + \frac{4\alpha\beta}{a^2-4\beta^2}$

22. Αν  $A = \frac{2\alpha + \beta}{\alpha + \beta} + \frac{2\beta + \alpha}{\alpha - \beta} - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$  και  $B = \frac{\alpha\beta + \beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ , να βρείτε το πηλίκο  $A : B$ .

23. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{1}{a^2 - \beta^2} - \frac{1}{\alpha\beta - \alpha^2} + \frac{1}{\alpha\beta + \alpha^2}$

β)  $\frac{2xy}{x^3 - y^3} - \frac{x - y}{x^2 + xy + y^2} + \frac{1}{x - y}$

γ)  $\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 4}$

24. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\left(\frac{3}{x} - \frac{3}{y}\right) \cdot \frac{xy}{6}$

β)  $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{w}\right) \cdot xyw$

γ)  $(x^2 - 3x) \cdot \frac{1}{x^2 - 9}$

δ)  $(x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{2x}$

25. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{(x+1)^2} \quad \beta) \left(\frac{1}{\alpha} - 1/\beta\right) \cdot (\alpha - \beta)$$

$$\gamma) \left(2 + \frac{2\alpha}{\beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{1}{2}\right) \quad \delta) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right) : \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)$$

26. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left[ \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} + \alpha \right) \cdot \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^3 - \beta^3} \right) : \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \right]$$

$$\beta) \frac{1-x}{1-\frac{1}{x}} \quad \gamma) \frac{1+2x}{1+\frac{1}{2x}}$$

27. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\frac{\alpha}{\mu} - \frac{\beta}{\mu}}{\frac{\gamma}{\mu}} \quad \beta) \frac{\frac{2x-y}{x-y} + 1}{1 + \frac{x}{x-y}} \quad \gamma) \frac{1 + \frac{2}{x}}{x+1 - \frac{1}{x+1}}$$

28. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2} \quad \beta) \left(\frac{1}{3x} - 2x + \frac{2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x}\right)$$

$$\gamma) \left(\frac{2x}{y-1}\right) \cdot \left(\frac{2x}{y+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{4x^2 - y^2}\right)$$

$$\delta) \left(\frac{5x+3y}{5\alpha} - \frac{9x+8y}{4\beta}\right) : \left(\frac{9\alpha-4\beta}{8y} + \frac{10\alpha-3\beta}{10x}\right)$$

29. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(\frac{x^2-4}{x+3} \cdot \frac{x^2+6x+9}{x^3+8} : \frac{x^2+x-6}{x^2-x}\right) \beta) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}\right) : \left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)$$

$$\gamma) [(2x^2 + y(x-y))] : \frac{\alpha x + \alpha y - x - y}{\alpha^2 - 1}$$

30. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$$

$$\beta) \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta^3}}{1 + \beta + \frac{1}{\beta}}$$

$$\gamma) \frac{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}$$

$$\delta) \frac{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} - 2}{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}}$$

31. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}} - \left(x \cdot \frac{1}{y}\right)^2$$

$$\beta) \frac{\frac{y}{x^4}}{\frac{x}{y^4}} - \left(y \cdot \frac{1}{x}\right)^5$$

$$\gamma) \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} + \frac{1}{\frac{x}{4} - 1} - \frac{2}{\frac{x}{4} - \frac{4}{x}}$$

32. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \cdot \frac{x^5 - x^4}{x^5 - 1}$$

$$\beta) \left[ \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \cdot (\alpha - \beta + 1) \right] : (\alpha^2 - 2\alpha\beta - 1 + \beta^2)$$

33. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left[ \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \right] - 1 - x^2$$

$$\beta) \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\gamma) \frac{2 - \frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

34. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{1}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)} + \frac{1}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)}$$

$$\beta) \frac{\beta\gamma}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma\alpha}{(\beta - \gamma)(\alpha - \beta)} + \frac{\alpha\beta}{(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}$$

35. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{1}{(x - y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x - y)^3} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

$$\beta) \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x + 1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{x} - x^2}{\frac{1}{x}}$$

$$\gamma) \frac{1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}} \cdot \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)$$

36. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\alpha}{\alpha^3 - \beta^3} \cdot \left( \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \quad \beta) \frac{\alpha^4 - \beta^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} : \frac{\alpha^2 - \beta^2}{x^2 - y^2}$$

$$\gamma) \left( \frac{\alpha}{\alpha + 3\beta} + \frac{\alpha}{\alpha - 3\beta} \right) \cdot \frac{\alpha^2 - 9\beta^2}{3\alpha^2}$$

37. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \left( \frac{4x}{x^2 + 1} + \frac{4x}{x^2 - 1} \right) : \left( \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right)$$

$$\beta) \left[ \frac{\alpha - \beta}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^2} \right] : \left[ \frac{1}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \right]$$

38. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{\frac{x+1}{x} - \frac{y+1}{y} + \frac{\omega+1}{\omega}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega}} \quad \beta) \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha+1} - \frac{\beta-1}{\beta+1}}{1 + \frac{\alpha-1}{\beta+1} \cdot \frac{\beta-1}{\alpha+1}}$$

$$\gamma) \frac{\frac{\alpha - \beta - 1}{\alpha - \beta} - \frac{\beta - \gamma - 1}{\beta - \gamma}}{\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} - \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta}}$$

39. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{x^2 + y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} = \left( 1 - \frac{y}{x} \right)^2$

40. α) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{x^3 + y^3}{x + y} - xy = (x - y)^2$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση  $\frac{117^3 + 17^3}{134} - 17 \cdot 117$

41. α) Αν  $A = \frac{4x}{x^2 + 4}$  και  $B = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ , να αποδείξετε ότι  $A^2 + B^2 = 1$ .

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί:  $1, \frac{400}{10.004}, \frac{9996}{10.004}$  αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

42. α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1000 \cdot 1001}$$

43. α) Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2} = \frac{1}{v(v+1)} + \frac{1}{(v+1)(v+2)}$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 100} + \frac{1}{100 \cdot 101}$$

## ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 1ΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Για να είναι η παράσταση  $ax^v$  μονώνυμο του  $x$ , αρκεί το  $v$  να είναι:
 

Α. ακέραιος	Β. θετικός πραγματικός
Γ. θετικός ρητός	Δ. θετικός ακέραιος
  
2. Αν  $(\alpha + 2\beta)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 + 4$ , τότε οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι:
 

Α. αντίθετοι	Β. αντίστροφοι
Γ. ετερόσημοι	Δ. Μεγαλύτεροι του 1
  
3. Αν ισχύει  $(x + y)^2 = (x - y)^2 = (x - y)^2$ , τότε:
 

Α. $x + y = x - y$	Β. $x = y = 0$	Γ. $x = 0$ ή $y = 0$	Δ. $x = 1, x = 1, y = 0$
--------------------	----------------	----------------------	--------------------------
  
4. Αν ισχύει  $(x + y)^3 = -8$ , τότε:
 

Α. $-y - 2 = -x$	Β. $y + 2 = x$	Γ. $x - 2 = y$	Δ. $x + 2 = -y$
------------------	----------------	----------------	-----------------
  
5. Το γινόμενο  $(\alpha - \beta)(-\alpha^2 - \beta^2)(-\beta - \alpha)(-\beta^4 - \alpha^4)$  είναι ίσο με:
 

Α. $\alpha^8 - \beta^4$	Β. $\beta^{16} - \alpha^{16}$	Γ. $\beta^8 - \alpha^8$	Δ. $\alpha^{16} - \beta^{16}$
-------------------------	-------------------------------	-------------------------	-------------------------------
  
6. Αν  $\alpha, \beta \neq 0$  και  $\alpha\beta = \alpha - \beta$ , τότε η διαφορά  $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$  είναι ίση με:
 

Α. 1	Β. -1	Γ. 0	Δ. $\alpha + \beta$
------	-------	------	---------------------
  
7. Αν  $1 + x/y = 0$ , τότε το πηλίκο  $2x - 3y/4x + 3y$  είναι ίσο με:
 

Α. 1	Β. 5	Γ. -5	Δ. -1
------	------	-------	-------
  
8. Αν το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι  $x^2 - 1$  και μία διάστασή του είναι  $x - 1$ , τότε η άλλη είναι:
 

Α. $x + 2$	Β. $x$	Γ. $x + 1$	Δ. $x - 1$
------------	--------	------------	------------
  
9. Στο πρώτο σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις  $\alpha + 1, \alpha - 1$  με  $\alpha > 1$ .

Στο δεύτερο σχήμα φαίνονται δύο τετράγωνα με πλευρές  $a$ ,  $x$  αντίστοιχα.

Αν τα γραμμοσκιασμένα χωρία είναι ισεμβαδικά, τότε το  $x$  ισούται με:

A.  $a + 1$                       B.  $a - 1$                       Γ.  $a$                       Δ.  $1$

$a - 1$

$a + 1$  (ΣΧΗΜΑ)

$ax$  (ΣΧΗΜΑ)

10. Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης  $\frac{3x}{x+2} \cdot x^2 - \frac{4}{x^2}$  για  $x = 2,5$  είναι:

A. 0,1                      B. 0,3                      Γ. 0,6                      Δ. 1,2

11. Αν  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{29}{100}$  (με  $a, b \neq 0$ ) και  $ab = -10$ , τότε  $(a + b)^2$  είναι:

A. 10                      B. 9                      Γ. 0                      Δ. 4

12. Αν  $x - \frac{1}{x} = 4$ ,  $x > 0$ , τότε το  $x + \frac{1}{x}$  είναι ίσο με:

A.  $\sqrt{2}$                       B.  $2\sqrt{2}$                       Γ.  $3\sqrt{2}$                       Δ.  $4\sqrt{2}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

13. Αν  $\theta$  είναι ένας θετικός και  $a$  ένας αρνητικός αριθμός, να βρείτε το πρόσημο των αριθμών:

α)  $3\theta$                       β)  $-4\theta$                       γ)  $2a$                       δ)  $-10a$   
 ε)  $\frac{a\theta}{\theta+3}$                       στ)  $\frac{a-2}{\theta+3}$                       ζ)  $a(a-1)(a-2)$                       η)  $\frac{a-\theta-2}{\theta-a+1}$   
 θ)  $\frac{a^2}{3}$                       ι)  $\frac{a^3-1}{1+a^2}$                       ια)  $\theta^2 + a^2$

14. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α)  $A = 2006 [(-1)^{2005} + (-1)^{2006}]^2 - [(-2)^{-32} + \frac{1}{64}]$

$$\beta) B = (-2)^{-3} : (-2)^{-1} + \frac{(-3)^{-2} - (-2)^{-4}}{(-4)^{-2}}$$

15. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^3 - (1 + \alpha)^{-2} + 4 \left( \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{2} \right)^{-1} + \left[ \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2006 \right)^{2007} \right]^0 \quad \text{για } \alpha = -\frac{3}{2} \text{ και } \beta = 3.$$

16. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{(\alpha\beta^{-1})^2}{(\alpha^2)^{-2}} : \left\{ \frac{(\beta^{-2})^2}{(\beta^3\alpha)^2} \cdot \left[ \frac{(\beta^2\alpha^{-2})^{-2}}{(\beta^2\alpha^{-2})^{-2}} \right]^{-1} \right\}^{-1}$  και να υπολογίσετε την αριθμητική της τιμή για  $\alpha = \sqrt{3}$  και  $\beta = (\sqrt{2})^{-1}$ .

17. Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = [x^3y^4]^{-1}(x^4y^3)^2 / x^3y^{-4})^2 x^{-3}y^5$ , αν οι αριθμοί  $x, y$  είναι αντίστροφοι.

18. Αν ισχύει  $x \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha + \beta} = \frac{0,5}{0,0025}$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $x$  για  $\alpha = \frac{1}{20}$  και  $\beta = \frac{1}{5}$ .

19. Αν  $n$  είναι ένας θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης.  
 $A = (3^{12} + 2^{18}) \cdot [(-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}]$

20. Να αποδείξετε ότι:  $\left( \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) : \frac{16\sqrt{15}}{15} = 2$

21. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\frac{10}{3}\sqrt{\frac{9}{80}} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}} + 5\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{20} - 10\sqrt{0,2}}{\frac{7}{2}\sqrt{32} - \sqrt{\frac{9}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{8}} + 6\sqrt{\frac{2}{9}} - 140\sqrt{0,02}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$

22. Να μετατρέψετε το κλάσμα  $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$  που έχει άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

23. Αν  $\alpha = 2 - \sqrt{3}$ , να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{\alpha} = 2 + \sqrt{3}$ .

24. Δίνονται οι αριθμοί  $A = \frac{x}{y}$  και  $B = \frac{y}{x}$  (όπου  $x, y \neq 0$ ).



- α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A και B είναι αντίστροφοι  
 β) Να εξετάσετε αν είναι δυνατόν οι A και B να είναι αντίθετοι.
25. Ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει βάση 6 m και περίμετρο 16 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
26. Να βρείτε τις τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  για τις οποίες η αλγεβρική παράσταση  $-5x^{\mu+1}y + 7xy^{\lambda+3}$  είναι μονώνυμο.
27. Να βρείτε τα γινόμενα:  
 α)  $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)$   
 β)  $(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^6 + \beta^6)$
28. Αν  $\alpha = 2x - y$  και  $\beta = x - 2y$ , να αποδείξετε ότι  
 $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
29. Αν  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\gamma^2 - \alpha\beta)$
30. Αν  $A = (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ , να βρείτε τον αριθμό  $A^2$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $A = 2$
31. Αν ισχύει  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ .
32. Αν  $\alpha = 3x - 2x + 2z$ ,  $\beta = 2x - y + 2z$ ,  $\gamma = 2x - 2y + z$  και  $(x + y)(x - y) = z^2$ , να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \gamma^2$ .
33. α) Να αποδείξετε ότι  $\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2 = x^3$ .  
 β) Να γράψετε τον αριθμό 1000 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.
34. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 α)  $x^5 - x^2y^3 + x^4y - xy^4$   
 β)  $x^2y^2 - x^2\omega^2 - y^2\omega^2 + \omega^4$   
 γ)  $1 - 4\alpha + 4\alpha^2 + 2\alpha(1 - 2\alpha) - 9\alpha^2 + 18\alpha^3$   
 δ)  $x^4 + 1$

35. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $4a^2 - 4ab + b^2 - 9a^2b^2$  β)  $1 + x^2 + 2y\omega - 2x - y^2 - \omega^2$

36. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $(x - 3y)(x + y) - (x - 3y)^2 - (x^2 - 9y^2)$  β)  $a^2 - 4ab + 4b^2 - 25\gamma^2$   
 γ)  $a^2 - b^2 + 4\beta - 4$  δ)  $a^7 - 27a^4 - a^3 + 27$

37. Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις: α)  $(x^2 + 3x - 18)^2 - (x^2 - 3x)^2$

β)  $9a^2 - 81a^2b^2 + 4b^2 - 12ab$

38. Να απλοποιήσετε το κλάσμα  $\frac{9a^3 - 6a^2 + a}{-6a^3 + 18a^4}$

39. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α)  $\frac{\kappa^2\lambda^4 - 2\kappa^3\lambda^3 + \kappa^4\lambda^2}{\kappa^2\lambda^4 - \kappa^4\lambda^2}$  β)  $\frac{(\alpha + \beta)x - \alpha\gamma - \beta\gamma + x - y}{(\alpha + \beta)(x^2 - y^2) - y^2 + x^2}$

40. Να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x-1} - 4 + \frac{2}{x^2-x}}{3x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{\frac{1}{x}-x}{1+\frac{1}{x}}}$

41. Αν  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , να απλοποιήσετε την παράσταση  $\frac{\alpha}{\alpha - x} \cdot \frac{\beta}{\beta - x}$

42. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{3\alpha}{\alpha - \beta} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$  β)  $\frac{2x}{x-2} - \frac{3x}{x-3} + \frac{4}{x^2 - 5x + 6}$

γ)  $\frac{\alpha^3}{\alpha + 1} + \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} + \frac{1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha - 1}$  δ)  $4 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}$

43. Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2} : \frac{1 - \frac{1}{\beta}}{1 + \frac{1}{\beta}}$  β)  $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta + \gamma} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha + \gamma}$   
 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta + \gamma} \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha + \gamma}$