

Περιλαμβάνει
τις λύσεις στις ασκήσεις
του σχολικού βιβλίου

Ελευθέριος Πρωτοπαπάς

Μαθηματικό

Β' Γυμνασίου



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr

ΒΙΒΛΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Ελευθέριος Πρωτοπαπός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Γυμνασίου



Θέση υπογραφής δικαιούχου δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας,
εφόσον η υπογραφή προβλέπεται από τη σύμβαση.

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Βιβλία για την εκπαίδευση
Ελευθέριος Πρωτοπαπάς, *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*
Υπεύθυνος έκδοσης: Νίκος Κύρος
Διορθώσεις: Νάντια Κουτσοουρούμπα
Μακέτα εξωφύλλου: Δάφνη Μπέη
DTP: Γιώργος Χατζησπύρος
Φιλμ – μοντάζ: Μαρία Ποινοπούλου-Ρένεση
Copyright © Σ. Πατάκης ΑΕΕΔΕ (Εκδόσεις Πατάκη) και Ελευθέριος Πρωτοπαπάς,
Αθήνα, 2017
Πρώτη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Αύγουστος 2017
Κ.Ε.Τ. Α914 – Κ.Ε.Π. 530/17
ISBN 978-960-16-7178-9



ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΔΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665, ΦΑΞ: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ ΒΟΡΕΙΑΣ ΕΛΛΑΔΑΣ: ΚΟΡΥΤΣΑΣ (ΤΕΡΜΑ ΠΟΝΤΟΥ – ΠΕΡΙΟΧΗ Β΄ ΚΤΕΟ),
570 09 ΚΑΛΟΧΩΡΙ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ, Τ.Θ. 1213, ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15, ΦΑΞ: 2310.70.63.55
Web site: <http://www.patakis.gr> • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γράμμα προς τον μαθητή	5
------------------------------	---

ΜΕΡΟΣ Α΄ – ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΑΠΟ ΤΗΝ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί	9
7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό	29
7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο	40
7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	48
Ασκήσεις επανάληψης	51
Κριτήριο αξιολόγησης	53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εξισώσεις – Ανισώσεις

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	54
1.2 Εξισώσεις α΄ βαθμού	63
1.3 Επίλυση τύπων	82
1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	90
1.5 Ανισώσεις α΄ βαθμού	99
Ασκήσεις επανάληψης	119
Κριτήρια αξιολόγησης	121

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	124
2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	138
2.3 Προβλήματα	150
Ασκήσεις επανάληψης	157
Κριτήρια αξιολόγησης	159

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης	161
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	171
3.3 Η συνάρτηση $y = ax$	188
3.4 Η συνάρτηση $y = ax + b$	200
3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ – Η υπερβολή	218
Ασκήσεις επανάληψης	229
Κριτήρια αξιολόγησης	231

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Περιγραφική Στατιστική

4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα	233
4.2 Γραφικές παραστάσεις	241
4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	254
4.4 Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	266
4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος	276
Ασκήσεις επανάληψης	288
Κριτήριο αξιολόγησης	291

ΜΕΡΟΣ Β΄ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	295
---------------------------------------	-----

1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών	300
1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	307
1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα	327
Ασκήσεις επανάληψης	342
Κριτήρια αξιολόγησης	344
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Τριγωνομετρία – Διανύσματα	
2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας	346
2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	359
2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	373
2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	380
2.5 Η έννοια του διανύσματος	393
2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	403
2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	414
Ασκήσεις επανάληψης	420
Κριτήρια αξιολόγησης	423
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Μέτρηση κύκλου	
3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες	426
3.2 Κανονικά πολύγωνα	439
3.3 Μήκος κύκλου	449
3.4 Μήκος τόξου	457
3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	469
3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα	476
Ασκήσεις επανάληψης	486
Κριτήρια αξιολόγησης	489
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών	
4.1 Ευθείες και επίπεδα στον χώρο	493
4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	502
4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	512
4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	523
4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του	530
4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της	539
4.7 Γεωγραφικές συντεταγμένες	547
Ασκήσεις επανάληψης	549
Κριτήριο αξιολόγησης	550
ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ	
Χρήσιμες οδηγίες	551
Ερωτήσεις θεωρίας	552
Ασκήσεις επανάληψης	567
Ενδεικτικά θέματα γραπτών εξετάσεων Μαΐου – Ιουνίου	581
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ	
Υποδείξεις – Απαντήσεις ερωτήσεων και ασκήσεων	591
Απαντήσεις των ερωτήσεων και λύσεις και ασκήσεων του σχολικού βιβλίου	641
Τριγωνομετρικοί αριθμοί	720

Γράμμα προς τον μαθητή (πώς πρέπει να διαβάσεις το βιβλίο αυτό)

Φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό που κρατάς στα χέρια σου μπορεί να γίνει ένα πολύτιμο εργαλείο για τη γνώση, την κατανόηση και την εμπέδωση των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου.

Το διάβασμά σου πρέπει απαραίτητα να χωρίζεται σε τρία στάδια:

- **ΘΕΩΡΙΑ**

Η γνώση της θεωρίας είναι βασικό μέρος του διαβάσματος στα μαθηματικά. Μάθε, κατανόησε, εμπέδωσε τη θεωρία που υπάρχει στην αρχή κάθε ενότητας. Η ύπαρξη πολλών παραδειγμάτων θα σε βοηθήσει.

- **ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΛΥΜΕΝΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

Όταν η θεωρία έχει γίνει πραγματικά κτήμα σου, μελέτησε και κατανόησε ποιες είναι οι διάφορες μορφές ασκήσεων που θα συναντήσεις. Σ' αυτό θα σε βοηθήσουν οι λυμένες εφαρμογές που αντιστοιχούν στις διάφορες μορφές ασκήσεων. Λύσε και ξαναλύσε τις λυμένες εφαρμογές, έτσι ώστε να έχεις καταλάβει πλήρως πώς και γιατί γίνεται το καθετί. Μην προσπαθήσεις να αποστηθίσεις ασκήσεις!!! Τα μαθηματικά είναι σκέψη και λογική, όχι «παπαγαλία».

- **ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΤΥΠΟΥ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ**

Εφόσον τα δύο προηγούμενα βήματα έχουν ολοκληρωθεί, λύσε τις ερωτήσεις κλειστού τύπου που υπάρχουν στο τέλος κάθε ενότητας. Στη συνέχεια λύσε τις ασκήσεις προς λύση χωρίς καμία βοήθεια. Προσπάθησε όσο το δυνατόν περισσότερο να αντιμετωπίσεις τα δύσκολα σημεία. Αν η λύση δεν προκύπτει, στο τέλος του βοηθήματος υπάρχουν υποδείξεις – απαντήσεις για να βοηθηθείς ή να ελέγξεις τα αποτελέσματα που βρήκες.

Μη λησμονείς ότι τα βήματα αυτά είναι απαραίτητα για να έχεις καταλάβει πλήρως τι διαπραγματεύεται κάθε ενότητα.

Όταν θα πλησιάζει η ώρα των εξετάσεων, χρησιμοποίησε τον «ΟΔΗΓΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ» που υπάρχει στο βιβλίο. Οι ερωτήσεις θεωρίας θα σε βοηθήσουν να δεις αν γνωρίζεις τη θεωρία, οι ασκήσεις επανάληψης για να ελέγξεις την ικανότητά σου στην επίλυση ασκήσεων και τα ενδεικτικά θέματα των εξετάσεων για να έχεις μια εικόνα της λογικής του τελικού διαγωνίσματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τη συνάδελφο Ευσταθίου Μαρία για τη συνδρομή της στη συγγραφή του πρώτου βοηθήματος για τα μαθηματικά της Β' Γυμνασίου, μέρος του οποίου χρησιμοποιείται και σε αυτό το βοήθημα.

Ο συγγραφέας
Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Σχόλια και παρατηρήσεις για την περαιτέρω βελτίωση του βιβλίου
μπορείτε να αποστείλετε στην ηλεκτρονική διεύθυνση
lprotopapas@hotmail.com ή στις Εκδόσεις Πατάκη.

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΑΛΓΕΒΡΑ

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί – Επανάληψη από την Α΄ Γυμνασίου

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί

Ορισμοί

1. Τα σύμβολα «+» και «-», εκτός από τη χρήση τους για την απεικόνιση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, μπορούν να τοποθετηθούν μπροστά από τους αριθμούς. Στην περίπτωση αυτή ονομάζονται **πρόσημα**.
2. **Θετικοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν πρόσημο +.
3. **Αρνητικοί** λέγονται οι αριθμοί που έχουν πρόσημο -.

Παραδείγματα

- Οι αριθμοί $+2$, $+5$, $+\frac{5}{8}$, $+3,4$ είναι θετικοί.
- Οι αριθμοί -1 , -4 , $-\frac{3}{7}$, $-45,1$ είναι αρνητικοί.
- Ο θετικός αριθμός $+4$ διαβάζεται «συν τέσσερα».
- Ο αρνητικός αριθμός -3 διαβάζεται «πλην τρία» ή «μείον τρία».

Ακέραιοι και ρητοί αριθμοί

Ορισμοί

1. Το σύνολο των φυσικών αριθμών και των αρνητικών που προκύπτουν βάζοντας μπροστά από τους φυσικούς το πρόσημο - ονομάζεται **σύνολο των ακέραιων αριθμών** και συμβολίζεται με \mathbb{Z} , δηλαδή έχουμε ότι $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
2. Το σύνολο που περιέχει όλους τους ακέραιους αριθμούς, όλα τα κλάσματα, τους δεκαδικούς με συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων και τους περιοδικούς δεκαδικούς (κάποιο κομμάτι του δεκαδικού μέρους επαναλαμβάνεται συνεχώς) ονομάζεται **σύνολο των ρητών αριθμών**, το οποίο συμβολίζεται με το γράμμα \mathbb{Q} .
3. Δύο ή περισσότεροι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο λέγονται **ομόσημοι**.
4. Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται **ετερόσημοι**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

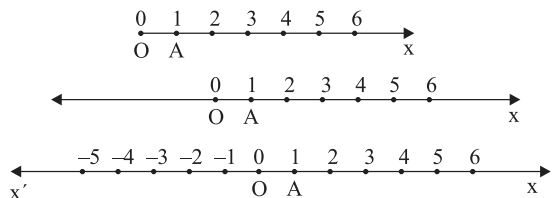
1. Το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
2. Ουσιαστικά, οι ομόσημοι αριθμοί θα είναι είτε θετικοί είτε αρνητικοί.
3. Στους θετικούς αριθμούς έχουμε τη δυνατότητα να μη βάζουμε μπροστά το πρόσημο +, ενεργώντας ακριβώς όπως κάναμε μέχρι σήμερα.
4. Το σύνολο των ρητών περιέχει όλους εκείνους τους αριθμούς που μπορούν να γραφούν ως κλάσμα με όρους ακεραίους.

Παραδείγματα

- Οι αριθμοί 2, 0, -11 είναι ακέραιοι.
- Οι αριθμοί 5, $-2, \frac{3}{5}$, -7,321, -4,555..., $6,3\overline{47}$ είναι ρητοί.
- Οι αριθμοί +2, +5, +9,2 είναι ομόσημοι, όπως και οι -1, -7, -3,1.
- Οι αριθμοί -1, +4 είναι ετερόσημοι.
- Ισχύει $+4 = 4$, $+10 = 10$ κτλ.
- Οι αριθμοί 7, 2,1, $0,\overline{3}$ είναι ρητοί, αφού $7 = \frac{7}{1}$, $2,1 = \frac{21}{10}$, $0,\overline{3} = 0,333\dots = \frac{1}{3}$.

Άξονας ή ευθεία των ρητών αριθμών

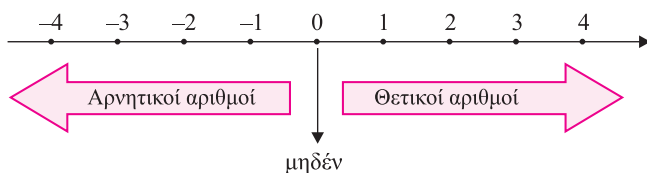
Έχουμε γνωρίσει την έννοια του ημιάξονα Ox των αριθμών, που αναφέρεται στους θετικούς αριθμούς. Αν προεκτείνουμε τον ημιάξονα προς την πλευρά του O , προκύπτει ένας



νέος ημιάξονας (ο Ox'), πάνω στον οποίο μπορούμε να εκφράσουμε τους αρνητικούς αριθμούς με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που εκφράσαμε και τους θετικούς. Έτσι έχουμε δημιουργήσει τον **άξονα (ή ευθεία) των ρητών αριθμών**, τον $x'Ox$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο άξονας $x'Ox$ περιλαμβάνει όλους τους ρητούς αριθμούς, δηλαδή τους αρνητικούς, το μηδέν και τους θετικούς αριθμούς.

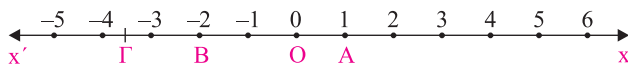


Ορισμός

Τετμημένη ενός σημείου της ευθείας των ρητών αριθμών ονομάζεται ο αριθμός που παριστάνει το σημείο. Αν a είναι η τετμημένη του σημείου A , συμβολίζουμε $A(a)$.

Παραδείγματα

Στον ακόλουθο άξονα έχουμε ότι η τετμημένη του A είναι 1, του B είναι -2 και του Γ είναι $-3,5$, άρα $A(1)$, $B(-2)$, $\Gamma(-3,5)$.



Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι αριθμοί

Ορισμοί

- Απόλυτη τιμή** ενός ρητού αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του σημείου με τετμημένη a από την αρχή O του άξονα των ρητών αριθμών και συμβολίζεται με $|a|$.
- Αντίθετοι αριθμοί** ονομάζονται οι δύο ετερόσημοι αριθμοί που έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Συνεπώς, αν $a \neq 0$, ο αντίθετος του a είναι ο $-a$.

Παραδείγματα



- Ο αντίθετος του $4 = +4$ είναι ο -4 , αφού $|-4| = |+4| = |4| = 4$.
- Ο αντίθετος του -8 είναι ο $8 = +8$, αφού $|-8| = |+8| = |8| = 8$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού είναι πάντα θετικός ή μηδέν (μη αρνητικός ρητός αριθμός), αφού το ίδιο συμβαίνει για οποιαδήποτε απόσταση.
 2. Η απόλυτη τιμή ενός μη μηδενικού αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημο.
 3. Η απόλυτη τιμή ενός μη μηδενικού αριθμού είναι πάντα θετικός αριθμός.
 4. Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος αριθμός.
 5. Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.
 6. Η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι το μηδέν.
 7. Δύο σημεία που έχουν την ίδια απόσταση από το 0 έχουν τετμημένες αντίθετους αριθμούς.
-
8. Η έκφραση $-x$ διαβάζεται: ο αντίθετος του x .
 9. Ο αντίθετος ενός αριθμού δεν είναι απαραίτητα αρνητικός, δηλαδή ο $-x$ δεν είναι απαραίτητα αρνητικός αριθμός.

Παραδείγματα

- Αν ο a είναι ρητός αριθμός, ισχύει $|a| \geq 0$.
- Αν ο a είναι ρητός αριθμός, ισχύει $|a| = |-a|$.
- $|+3,45| = 3,45$.
- $|-2,09| = 2,09$.
- $|0| = 0$.
- $|-5| = |+5| = |5| = 5$, $|-3| = |+3| = |3| = 3$.
- Η έκφραση $-(-8)$ σημαίνει ο αντίθετος του -8 και ισούται με 8 , αφού $-(-8) = 8$.

Σύγκριση ρητών αριθμών

- Ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιάτε-
ρα στον άξονα.
- Ανάμεσα σε δύο θετικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός με τη μεγαλύτερη
απόλυτη τιμή.
- Ανάμεσα σε δύο αρνητικούς αριθμούς, μεγαλύτερος είναι αυτός με τη μικρότερη
απόλυτη τιμή.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.
- Το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό.
- Το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό.

Παραδείγματα

- $-3 < -1 < 0 < 2$
- $3 < 5, 3 > 0$
- $-3 > -5$ (αφού $|-3| < |-5|$), $-3 < 0$, $-5 < 6$



Πρόσθεση ρητών αριθμών

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς, βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο και προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, βάζουμε ως πρόσημο αυτό του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή και αφαιρούμε από τη μεγαλύτερη τη μικρότερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

- $(-3) + (-8) = -(|-3| + |-8|) = -(3 + 8) = -11$
- $(+3) + (+8) = +(|+3| + |+8|) = +(3 + 8) = +11$
- $(-3) + (+8) = +(|+8| - |-3|) = +(8 - 3) = +5$
- $(+3) + (-8) = -(|+8| - |+3|) = -(8 - 3) = -5$

Άθροισμα πολλών προσθετέων

Για να βρούμε το άθροισμα πολλών προσθετέων, προσθέτουμε μαζί όλους τους θετικούς και μαζί όλους τους αρνητικούς, οπότε προκύπτει άθροισμα δύο ετερόσημων όρων.

Παραδείγματα

- $2 + (-4) + (-5) + (+3) = (+2) + (+3) + (-4) + (-5) = (+5) + (-9) = -4$
- $(-8) + 7 + (-5) + (+11) + (-4) = 7 + (+11) + (-8) + (-5) + (-4) = (+18) + (-17) = 1$

Ιδιότητες της πρόσθεσης

Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0:

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Συμμετρικό στοιχείο του α για την πρόσθεση είναι το $-\alpha$:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$$

Αφαίρεση ρητών αριθμών

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β , προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β , δηλαδή $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Παραδείγματα

- $(-15) - (+6) = (-15) + [-(+6)] = (-15) + (-6) = -21$
- $(-15) - (-6) = (-15) + [-(-6)] = (-15) + (+6) = -9$
- $(+15) - (+6) = (+15) + [-(+6)] = (+15) + (-6) = 9$
- $(+15) - (-6) = (+15) + [-(-6)] = (+15) + (+6) = 21$

Απαλοιφή παρενθέσεων

Ορισμός

Απαλοιφή παρενθέσεων λέγεται η διαδικασία με την οποία διώχνουμε τις παρενθέσεις από μια αλγεβρική παράσταση.

Για να απαλείψουμε τις παρενθέσεις από μια αριθμητική ή αλγεβρική παράσταση, ακολουθούμε τον εξής κανόνα:

1. Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει + ή αν δεν υπάρχει καθόλου πρόσημο, τότε διώχνουμε την παρένθεση και γράφουμε τους όρους που είναι εντός της παρένθεσης με το πρόσημο που ήδη έχουν.
2. Αν μπροστά από μια παρένθεση υπάρχει -, τότε διώχνουμε την παρένθεση και γράφουμε τους όρους που είναι εντός της παρένθεσης με αλλαγμένο πρόσημο.

Παραδείγματα

- $+(5x - 8) = 5x - 8$, $(5x - 8) = 5x - 8$, $-(5x - 8) = -5x + 8$
- $32 - (17 - 9) = 32 - 17 + 9 = 15 + 9 = 24$
- $54 + (15 - 11) = 54 + 15 - 11 = 69 - 11 = 58$
- $13 - (10 - 3 + 5) + (19 - 4) = 13 - 10 + 3 - 5 + 19 - 4 = 16$

Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Για τον πολλαπλασιασμό δύο ρητών ακολουθούμε τον εξής κανόνα:

♦ Για ομόσημους αριθμούς

Βάζουμε πρόσημο + και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών.

♦ Για ετερόσημους αριθμούς

Βάζουμε πρόσημο - και πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών.

Κανόνες προσήμου

$++ = +$
 $-- = +$
 $+ \cdot - = -$
 $- \cdot + = -$

Παραδείγματα

- $(+8) \cdot (+9) = +8 \cdot 9 = +72 = 72$
- $(-8) \cdot (+9) = -8 \cdot 9 = -72 = -72$
- $(-8) \cdot (-9) = +8 \cdot 9 = +72 = 72$
- $(+8) \cdot (-9) = -8 \cdot 9 = -72 = -72$

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 1:

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

Προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$$

Συμμετρικό στοιχείο του $\alpha \neq 0$ για τον πολλαπλασιασμό είναι το $\frac{1}{\alpha}$:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0)$$

Απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το 0:

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$$

Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Επιμεριστική ιδιότητα ως προς την αφαίρεση:

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Διπλή επιμεριστική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) &= \\ &= \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$.
- Αν $\alpha \cdot \beta = 1$, οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι, δηλαδή ο αριθμός α είναι αντίστροφος του β και ο β είναι αντίστροφος του α .
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\alpha, \beta \neq 0$) είναι ένας ρητός αριθμός, ο αντίστροφός του είναι ο $\frac{\beta}{\alpha}$.
- Το μηδέν δεν έχει αντίστροφο, γιατί το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού με το μηδέν δίνει πάντα μηδέν και ποτέ ένα.

Παραδείγματα

- $(-1) \cdot 6 = -6$.
- Ο αντίστροφος του $-\frac{2}{3}$ είναι ο $-\frac{3}{2}$.
- Ο αντίστροφος του $-\frac{1}{5}$ είναι ο $-\frac{5}{1} = -5$.
- Ο αντίστροφος του -1 είναι ο $\frac{1}{-1} = -1$.
- Ο αντίστροφος του 1 είναι ο 1.

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο που αποτελείται από πολλούς παράγοντες:

- ✓ μετράμε το πλήθος των αρνητικών όρων και, αν είναι άρτιο, το πρόσημο του γινομένου είναι +, ενώ, αν είναι περιττό, το πρόσημο είναι −,
- ✓ πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους.

Παραδείγματα

- $(-3) \cdot (+2) \cdot (-1) \cdot (-4) = -(3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4) = -24$ [3 αρνητικοί αριθμοί]
- $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{11}{6}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{11}{6} = \frac{11}{40}$ [4 αρνητικοί αριθμοί]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν ένας παράγοντας του γινομένου είναι μηδέν, όλο το γινόμενο είναι μηδέν.
2. Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού « \cdot » δεν είναι απαραίτητο να σημειώνεται μεταξύ των γραμμάτων (μεταβλητών) και των αριθμών ή μεταξύ των μεταβλητών.

Παραδείγματα

- $23 \cdot 356 \cdot 0 \cdot 6.789 = 0$
- $3 \cdot x = 3x, -8 \cdot x \cdot y = -8xy$

Διαίρεση ρητών αριθμών

Για τη διαίρεση δύο ρητών, ακολουθούμε τον κανόνα:

$$a : \beta = a \cdot \frac{1}{\beta}, \text{ με } \beta \neq 0$$

- Για ομόσημους αριθμούς
Βάζουμε πρόσημο + και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών.
- Για ετερόσημους αριθμούς
Βάζουμε πρόσημο − και διαιρούμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών.

Κανόνες προσήμου

+ : + = +

− : − = +

+ : − = −

− : + = −

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Όταν ο διαιρετέος είναι μηδέν, το πηλίκο είναι επίσης μηδέν, δηλαδή

$$0 : \alpha = \frac{0}{\alpha} = 0, \text{ με } \alpha \neq 0 .$$

2. Σε μια διαίρεση ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι μηδέν, όπως ακριβώς δε νοείται κλάσμα με παρονομαστή μηδέν.

Παραδείγματα

✓ $(+15) : (+5) = +(15 : 5) = +3 = 3.$

✓ $(-72) : (+9) = -(72 : 9) = -8.$

✓ $(+3,4) : (-0,2) = -(3,4 : 0,2) = -17.$

✓ $(-72) : (-9) = +72 : 9 = 8.$

✓ $0 : 5 = \frac{0}{5} = 0.$

- ✓ Οι διαιρέσεις $5 : 0$, $-6 : 0$, $\frac{3}{2} : 0$ δεν ορίζονται και γι' αυτόν τον λόγο είναι λάθος να γράφουμε τέτοιες διαιρέσεις.

Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

Ορισμός

Περιοδικός λέγεται κάθε δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία, όπου στο δεκαδικό μέρος από ένα ψηφίο και μετά κάποια ψηφία επαναλαμβάνονται συνεχώς. Το επαναλαμβανόμενο μέρος του περιοδικού δεκαδικού λέγεται **περίοδος του περιοδικού δεκαδικού**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε ρητός αριθμός έχει τη μορφή δεκαδικού με συγκεκριμένο πλήθος δεκαδικών ψηφίων (αλλιώς πεπερασμένο) ή τη μορφή περιοδικού δεκαδικού.

Παραδείγματα

- ✓ Ο αριθμός $0,3333\dots = 0,\overline{3}$ είναι περιοδικός δεκαδικός με περίοδο 3.

- ✓ Ο αριθμός $1,3131\dots = 1,\overline{31}$ είναι περιοδικός δεκαδικός με περίοδο 31.
- ✓ $\frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,\overline{3}$, $\frac{130}{99} = 1,3131\dots = 1,\overline{31}$.
- ✓ $0,3 = \frac{3}{10}$, $0,33 = \frac{33}{100}$, $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή:

- α) 16 β) +71 γ) 0 δ) -6

Λύση

- α) Αφού $|16| = |-16| = 16$, οι αριθμοί 16 και -16 έχουν απόλυτη τιμή 16. $|a| = |-a|$
- β) Αφού $|+71| = |-71| = 71$, οι αριθμοί 71 και -71 έχουν απόλυτη τιμή 71.
- γ) Αφού $|0| = 0$, μόνο το 0 έχει απόλυτη τιμή 0.
- δ) Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι θετικός αριθμός ή μηδέν, οπότε δεν μπορεί να είναι -6, δηλαδή δεν υπάρχει αριθμός με απόλυτη τιμή -6.

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = |-4| + |5| - |-7,1| + |0,11|$.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= |-4| + |5| - |-7,1| + |0,11| = 4 + 5 - 7,1 + 0,11 = \\ &= 9 - 7,1 + 0,11 = 1,9 + 0,11 = 2,01 \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

3. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- α) $(-9) + (-6)$ β) $(+41) + (-73)$ γ) $(-27) + (+61)$
 δ) $(+34) + (+57)$ ε) $(-5,4) + (-8,9)$ στ) $(+9,7) + (-3,9)$

Λύση

- α) $(-9) + (-6) = -(9 + 6) = -15$ [πρόσθεση ομοσήμων]
 β) $(+41) + (-73) = -(73 - 41) = -32$ [πρόσθεση ετεροσήμων]
 γ) $(-27) + (+61) = +(61 - 27) = +34 = 34$ [πρόσθεση ετεροσήμων]
 δ) $(+34) + (+57) = +(34 + 57) = +91 = 91$ [πρόσθεση ομοσήμων]
 ε) $(-5, 4) + (-8, 9) = -(5, 4 + 8, 9) = -14, 3$ [πρόσθεση ομοσήμων]
 στ) $(+9, 7) + (-3, 9) = +(9, 7 - 3, 9) = +5, 8 = 5, 8$ [πρόσθεση ετεροσήμων]

4. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right)$ β) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right)$ γ) $\left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{10}{3}\right)$

Λύση

α) $\left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) = -\left(\frac{5}{8} + \frac{7}{4}\right) = -\left(\frac{5}{8} + \frac{7 \cdot 2}{4 \cdot 2}\right) = -\left(\frac{5}{8} + \frac{14}{8}\right) = -\frac{19}{8}$
 β) $\left(-\frac{3}{7}\right) + \left(+\frac{5}{3}\right) = +\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{7}\right) = +\left(\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7} - \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 3}\right) = +\left(\frac{35}{21} - \frac{9}{21}\right) = \frac{26}{21}$
 γ) $\left(+\frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{10}{3}\right) = -\left(\frac{10}{3} - \frac{1}{5}\right) = -\left(\frac{10 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3}\right) = -\left(\frac{50}{15} - \frac{3}{15}\right) = -\frac{47}{15}$

5. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$A = (+34) + (-87) + (+55) + (-72)$ $B = (-671) + (+308) + (-582) + (+927)$

Λύση

$A = (+34) + (-87) + (+55) + (-72) = (+34) + (+55) + (-87) + (-72) =$
 $= (+89) + (-159) = -(159 - 89) = -70$
 $B = (-671) + (+308) + (-582) + (+927) =$
 $= (-671) + (-582) + (+308) + (+927) =$
 $= (-1.253) + (+1.235) = -(1.253 - 1.235) = -18$

Προσθέτουμε πρώτα τους θετικούς και τους αρνητικούς μεταξύ τους.

6. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{11}{12}\right)$.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{11}{12}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{11}{12}\right) + \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) = \\ &= \left(+\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}\right) + \left(+\frac{11}{12}\right) + \left(-\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2}\right) + \left(-\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3}\right) = \\ &= \left(+\frac{8}{12}\right) + \left(+\frac{11}{12}\right) + \left(-\frac{10}{12}\right) + \left(-\frac{9}{12}\right) = \left(+\frac{19}{12}\right) + \left(-\frac{19}{12}\right) = 0 \end{aligned}$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

7. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

α) $(-43) - (-34)$

β) $(-18) - (+14)$

γ) $(+76) - (-53)$

δ) $(+26) - (+69)$

ε) $(-1,3) - (+5,8)$

στ) $(+4,7) - (-8,6)$

ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right)$

η) $\left(+\frac{7}{18}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)$

θ) $\left(+\frac{11}{8}\right) - \left(+\frac{7}{4}\right)$

Λύση

α) $(-43) - (-34) = (-43) + (+34) = -(43 - 34) = -9$

β) $(-18) - (+14) = (-18) + (-14) = -(18 + 14) = -32$

γ) $(+76) - (-53) = (+76) + (+53) = +(76 + 53) = +129$

δ) $(+26) - (+69) = (+26) + (-69) = -(69 - 26) = -43$

ε) $(-1,3) - (+5,8) = (-1,3) + (-5,8) = -(1,3 + 5,8) = -7,1$

στ) $(+4,7) - (-8,6) = (+4,7) + (+8,6) = +(4,7 + 8,6) = +13,3$

ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{7}{6}\right) = +\left(\frac{7}{6} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) = +\left(\frac{7}{6} - \frac{4}{6}\right) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

η) $\left(+\frac{7}{18}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right) = \left(+\frac{7}{18}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) = +\left(\frac{7}{18} + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}\right) = +\left(\frac{7}{18} + \frac{15}{18}\right) = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}$

θ) $\left(+\frac{11}{8}\right) - \left(+\frac{7}{4}\right) = \left(+\frac{11}{8}\right) + \left(-\frac{7}{4}\right) = -\left(\frac{7 \cdot 2}{4 \cdot 2} - \frac{11}{8}\right) = -\left(\frac{14}{8} - \frac{11}{8}\right) = -\frac{3}{8}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

8. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

A = $(-5) + (+7) - (+15) - (-4)$

B = $|-3| + |5| - |-11| + |7|$

Λύση

$$A = (-5) + (+7) - (+15) - (-4) = (-5) + (+7) + (-15) + (+4) =$$

$$= (-5) + (-15) + (+7) + (+4) = (-20) + (+11) = -(20 - 11) = -9$$

$$B = |-3| + |+5| - |-11| + |7| = (+3) + (+5) - (+11) + (+7) =$$

$$= (+3) + (+5) + (+7) + (-11) = (+15) + (-11) = +(15 - 11) = +4 = 4$$

9. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων με δύο τρόπους:

$$A = 26 - (12 - 31 - 3) + (2 - 4) \quad B = 123 + (-159 + 45 - 7) - (76 - 12)$$

Λύση

α) 1ος τρόπος – με απαλοιφή παρενθέσεων

$$A = 26 - (12 - 31 - 3) + (2 - 4) = 26 - 12 + 31 + 3 + 2 - 4 =$$

$$= 26 + 31 + 3 + 2 - 12 - 4 = 62 - 16 = 46$$

2ος τρόπος – με πράξεις στις παρενθέσεις

$$A = 26 - (12 - 31 - 3) + (2 - 4) = 26 - (12 - 34) + (-2) =$$

$$= 26 - (-22) + (-2) = 26 + 22 - 2 = 48 - 2 = 46$$

β) 1ος τρόπος – με απαλοιφή παρενθέσεων

$$B = 123 + (-159 + 45 - 7) - (76 - 12) = 123 - 159 + 45 - 7 - 76 + 12 =$$

$$= 123 + 45 + 12 - 159 - 7 - 76 = 180 - 242 = -(242 - 180) = -62$$

2ος τρόπος – με πράξεις στις παρενθέσεις

$$B = 123 + (-159 + 45 - 7) - (76 - 12) =$$

$$= 123 + (-159 - 7 + 45) - (76 - 12) = 123 + (-166 + 45) - (76 - 12) =$$

$$= 123 + (-121) - (+64) = 123 - 121 - 64 = 123 - 185 = -62$$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

10. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(-13) \cdot (-24)$

β) $(-16) \cdot (+3)$

γ) $(+7) \cdot (-61)$

δ) $(-7) \cdot 1,5$

ε) $(-23) \cdot (-8)$

στ) $4,2 \cdot (-5)$

Λύση

α) $(-13) \cdot (-24) = +13 \cdot 24 = 312$

β) $(-16) \cdot (+3) = -16 \cdot 3 = -48$

γ) $(+7) \cdot (-61) = -7 \cdot 61 = -427$

δ) $(-7) \cdot 1,5 = -7 \cdot 1,5 = -10,5$

ε) $(-23) \cdot (-8) = +23 \cdot 8 = 184$

στ) $4,2 \cdot (-5) = -4,2 \cdot 5 = -21$

11. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(-3) \cdot (+5) \cdot (-7) \cdot (-9)$

β) $(-2) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (-8)$

γ) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right)$

δ) $\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{33}{10}\right) \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{12}$

Λύση

α) $(-3) \cdot (+5) \cdot (-7) \cdot (-9) = -3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = -945$

[3 αρνητικοί]

β) $(-2) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (-8) = +2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$

[4 αρνητικοί]

γ) $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \left(+\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = +\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} = \frac{1}{6}$

[2 αρνητικοί]

δ) $\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{33}{10}\right) \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{12} = -\frac{5}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{33}}{\cancel{10}} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{21}{\cancel{12}} = -\frac{5 \cdot \cancel{3} \cdot 11 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = -\frac{11}{2}$

[1 αρνητικός]

12. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = (3x + 1)(1 - 2x)(x + 4)$, για $x = -2$,

$B = (y - 3)(y + 3)(5 - y)(5 + y)$, για $y = -0,2$.

Λύση

$A = (3 \cdot (-2) + 1)(1 - 2 \cdot (-2))(-2 + 4) =$
 $= (-6 + 1)(1 + 4)(-2 + 4) = (-5) \cdot 5 \cdot 2 = -50$

$B = (-0,2 - 3)(-0,2 + 3)(5 - (-0,2))(5 + (-0,2)) =$
 $= (-0,2 - 3)(-0,2 + 3)(5 + 0,2)(5 - 0,2) =$
 $= (-3,2) \cdot 2,8 \cdot 5,2 \cdot 4,8 = -223,6416$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

13. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $(-234) : (-9)$

β) $(-225) : 15$

γ) $36,8 : (-2,3)$

δ) $\left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{4}{7}\right)$

ε) $\left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{2}{9}\right)$

στ) $\left(-\frac{10}{21}\right) : \left(+\frac{8}{3}\right)$

Λύση

$$\alpha) (-234) : (-9) = +(234 : 9) = 26$$

$$\beta) (-225) : 15 = -225 : 15 = -15$$

$$\gamma) 36,8 : (-2,3) = -36,8 : 2,3 = -16$$

$$\delta) \left(+\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = -\frac{14}{12} = -\frac{14 : 2}{12 : 2} = -\frac{7}{6}$$

$$\epsilon) \left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{2}{9}\right) = +\frac{5}{6} : \frac{2}{9} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{2} = \frac{45}{12} = \frac{45 : 3}{12 : 3} = \frac{15}{4}$$

$$\sigma\tau) \left(-\frac{10}{21}\right) : \left(+\frac{8}{3}\right) = -\frac{10}{21} : \frac{8}{3} = -\frac{10}{21} \cdot \frac{3}{8} = -\frac{30}{168} = -\frac{30 : 6}{168 : 6} = -\frac{5}{28}$$

14. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \left(-\frac{-2}{3} - \frac{5}{-9}\right) : \left(-\frac{-5}{-2} - \frac{-3}{4}\right) \quad B = \frac{3}{-2} + \frac{-5}{6} - \frac{-8}{-3}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \left(-\frac{-2}{3} - \frac{5}{-9}\right) : \left(-\frac{-5}{-2} - \frac{-3}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{9}\right) : \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{4}\right) = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} + \frac{5}{9}\right) : \left(-\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{6}{9} + \frac{5}{9}\right) : \left(-\frac{10}{4} + \frac{3}{4}\right) = \\ &= \frac{11}{9} : \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{11}{9} : \frac{7}{4} = -\frac{11}{9} \cdot \frac{4}{7} = -\frac{44}{63} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{-2} + \frac{-5}{6} - \frac{-8}{-3} = -\frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(+\frac{8}{3}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{5}{6} - \frac{8}{3} = \\ &= -\frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{8 \cdot 4}{3 \cdot 4} = -\frac{18}{12} - \frac{10}{12} - \frac{32}{12} = -\left(\frac{18}{12} + \frac{10}{12} + \frac{32}{12}\right) = -\frac{60}{12} = -5 \end{aligned}$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

15. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = -2 \cdot \left[(-9) : \frac{3}{4} + (-2)(-4)\right] + \frac{3}{5} \cdot [-2 \cdot 3 + (-8) \cdot (-2)]$$

Λύση

$$A = -2 \cdot \left[(-9) : \frac{3}{4} + (-2)(-4)\right] + \frac{3}{5} \cdot [-2 \cdot 3 + (-8) \cdot (-2)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \cdot \left[(-9) \cdot \frac{4}{3} + (-2)(-4) \right] + \frac{3}{5} \cdot [-2 \cdot 3 + (-8) \cdot (-2)] = \\
 &= -2 \cdot \left(-\frac{36}{3} + 8 \right) + \frac{3}{5} \cdot (-6 + 16) = -2 \cdot (-12 + 8) + \frac{3}{5} \cdot (-6 + 16) = \\
 &= -2 \cdot (-4) + \frac{3}{5} \cdot 10 = +8 + \frac{30}{5} = 8 + 6 = 14
 \end{aligned}$$

Ασκήσεις προς λύση

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΡΗΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των αριθμών και τους αντίθετους των αριθμών:

$$-7, 6, -1,34, 5,93, -\frac{2}{3}, +10$$

2. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τους αριθμούς με απόλυτη τιμή:

α) 11 **β)** 56 **γ)** (-8) **δ)** 13

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{aligned}
 A &= |-8| - |-3| & B &= |+11| + |-7| & \Gamma &= |-9| - |+6| \\
 \Delta &= |-13| + |-4| & E &= |-25| - |-5| & Z &= |9| + |-3|
 \end{aligned}$$

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{aligned}
 A &= |-2| \cdot |+4| & B &= |-3| \cdot |-5| & \Gamma &= |-7| \cdot |-6| \\
 \Delta &= \left| +\frac{3}{5} \cdot \left| -\frac{20}{9} \right| \right| & E &= \left| -\frac{2}{7} \cdot \left| -\frac{21}{8} \right| \right| & Z &= \left| +2\frac{1}{3} \cdot \left| 3\frac{2}{5} \right| \right|
 \end{aligned}$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\begin{aligned}
 A &= |+17| - |-3| - |5| + |-9| & B &= |-8| + |+5| + |9| - |-17| \\
 \Gamma &= |-29| - |+8| - |-3| + |6| & \Delta &= |31| - |-14| - |+15| + |-7|
 \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

6. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) (+10) + (-7) **β)** (-15) + (-8) **γ)** (+5) + (+9)
δ) (-98) + (+45) **ε)** (+36) + (-50) **στ)** (-7) + (+9)

7. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$\alpha) \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) \quad \beta) \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{12}\right) \quad \gamma) \left(+\frac{7}{6}\right) + \left(+\frac{5}{4}\right)$$

$$\delta) \left(-\frac{4}{5}\right) + \left(+\frac{3}{2}\right) \quad \epsilon) \left(-\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \quad \sigma\tau) (-4) + \left(+\frac{13}{5}\right)$$

8. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$A = (+34) + (-71) + (+82) + (-94) \quad B = (-99) + (-82) + (-54) + (+11)$$

$$\Gamma = (+52) + (-84) + (+43) + (-54) \quad \Delta = (-25) + (-45) + (-76) + (+187)$$

9. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$A = |(-45) + (+32)| + (-17) \quad B = |12 + (-25)| + (-62) + |(31) + (-56)|$$

10. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

$$A = \left(-\frac{9}{2}\right) + \left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) \quad B = \left(+\frac{3}{14}\right) + \left(-\frac{10}{21}\right) + \left(-\frac{5}{7}\right) + \left(+\frac{7}{2}\right)$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

11. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

$$\alpha) (+72) - (+87) \quad \beta) (-44) - (-51) \quad \gamma) (+42) - (-35)$$

$$\delta) (-71) - (+53) \quad \epsilon) (+56) - (+92) \quad \sigma\tau) (-33) - (-49)$$

12. Να υπολογίσετε τις διαφορές:

$$\alpha) \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{3}{7}\right) \quad \beta) \left(+\frac{5}{9}\right) - \left(-\frac{11}{6}\right) \quad \gamma) \left(-\frac{7}{2}\right) - \left(+\frac{5}{2}\right)$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (+23) - (+72) - (-55) + (-24) \quad B = (-73) + (-62) - (+93) - (-14)$$

$$\Gamma = (-67) + (-45) - (+39) - (+82) \quad \Delta = (+37) - (+69) + (-44) - (+18)$$

14. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = -97 + 63 - 36 + 66 - 59 \quad B = 46 - 82 - 15 + 38 - 11$$

$$\Gamma = -73 + 64 + 51 - 25 + 65 - 47 \quad \Delta = 34 - 77 - 61 + 32 - 97$$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = |+34| - |-72| - |+53| - |-47| \quad B = |-54| - |+63| - |-52| + |-83|$$

$$\Gamma = |-53| - |+45| + |-71| - |27| \quad \Delta = |-78| - |-61| + |-34| - |26|$$

16. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων με δύο τρόπους:

α) $65 + (27 - 18 - 33) - (22 - 14)$ **β)** $-57 - (-55 + 32 - 9) - (61 - 27)$

γ) $53 - (-77 + 39 + 23) + (92 - 41)$ **δ)** $83 + (-91 + 75 + 37) - (31 - 24)$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = -23 + (17 - 28 - 9) - [84 - (32 - 48 + 5) + (41 - 89)]$

$B = -(98 - 45) + (32 - 76 - 9) + [-87 - (32 - 65 + 2) + (31 - 13)]$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

18. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(-7) \cdot (-9)$

β) $(-4) \cdot (+8)$

γ) $(+7) \cdot (-6)$

δ) $(-5) \cdot 5$

ε) $(-5, 6) \cdot (-8)$

στ) $(-4, 7) \cdot (+3)$

19. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	y	x + y	x - y	y - x	xy
-5	+6				
-3	-8				
9	7				
+4	-2				

20. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\left(+\frac{25}{12}\right) \cdot \left(-\frac{18}{10}\right)$

β) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)$

γ) $\left(-\frac{30}{7}\right) \cdot \left(+\frac{21}{18}\right)$

21. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $(-1) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (-4)$

β) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \cdot (-8)$

γ) $(-1 - 2) \cdot (-3 - 4) \cdot (-5 - 6)$

δ) $(1 - 2) \cdot (3 + 6) \cdot (-7 + 9)$

22. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $-8 \cdot (15 - 7) + 11 \cdot (25 - 31)$

β) $42 \cdot (51 - 94) + (-31) \cdot (-6)$

γ) $(-45 - 9) \cdot (-7) + (16 - 27) \cdot (-5)$

δ) $(-23 + 39) \cdot (-2) + (4 + 6 - 7) \cdot (-2)$

23. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $6 \cdot \left(-\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(2 - \frac{8}{3}\right)$

β) $-\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{9}{2} - \frac{5}{3}\right) - \frac{3}{14} \cdot \left(6 - \frac{2}{3}\right)$

γ) $(-4) \cdot \left(\frac{7}{6} - \frac{5}{10}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{7}{9} + \frac{4}{6}\right)$

δ) $\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{15}{2} - \frac{6}{16}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

24. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\alpha) (+30) : (-6)$$

$$\beta) (+225) : (+5)$$

$$\gamma) (-81) : (-9)$$

$$\delta) (-45) : (-9)$$

$$\epsilon) (-285) : 19$$

$$\sigma\tau) (-667) : (-23)$$

25. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

$$\alpha) \left(-\frac{4}{3}\right) : \left(+\frac{2}{7}\right)$$

$$\beta) \frac{15}{8} : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{35}{8}\right) : \left(-\frac{5}{14}\right)$$

$$\delta) \left(-\frac{7}{2}\right) : \left(+\frac{3}{10}\right)$$

$$\epsilon) \left(-\frac{12}{5}\right) : \left(-\frac{25}{9}\right)$$

$$\sigma\tau) \left(+\frac{21}{10}\right) : \left(-\frac{4}{35}\right)$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

26. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = -36 : (5 - 9)$$

$$B = (6 - 18) : (+3)$$

$$\Gamma = (5 \cdot 6 - 3) : (-9)$$

$$\Delta = (-48 + 8 \cdot 9) : (-2 \cdot 4)$$

$$E = (7 \cdot 6 - 8 \cdot 8) : (-12 : 6)$$

$$Z = (-12 \cdot 6 - 8 \cdot 3) : (-2 \cdot 9 + 4 \cdot 4)$$

27. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-32) : (-4) \cdot (+2) : (-8)$$

$$B = (-32) : (-4) : (+2) \cdot (-8)$$

$$\Gamma = (-32) \cdot (-4) : (+2) : (-8)$$

$$\Delta = (-32) : (-4) : (+2) : (-8)$$

28. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-3 - 4) \cdot (2 \cdot 4 - 2 : 1) + 144 : (3 \cdot 5 - 12 : 4)$$

$$B = (8 \cdot 9 - 1 - 7) : (-3 \cdot 5 + 7) - (-1) \cdot (-2) \cdot (+3) : (-6)$$

$$\Gamma = (+4)(-9) - 225 : (-5) + 3 \cdot (5 \cdot 8 - 4 : 2) - (-36) : (-3)$$

$$\Delta = (-34 - 6 \cdot 6 + 7 \cdot 9) \cdot (-2 \cdot 4 + 18 : 2) - (-3) \cdot (+4) : (-6)$$

29. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \left(-\frac{7}{10} + \frac{11}{15}\right) : \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$B = \left(\frac{5}{6} - \frac{11}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

30. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = [(-3) \cdot (-4) - (2 \cdot 3 - 11) - 5 - 2] \cdot (-2) + 256 : (4 \cdot 5 - 6 \cdot 2)$$

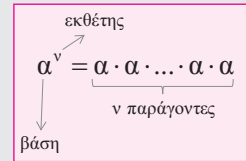
$$B = (-12 - 8) : [1 - 3 \cdot (-5) - (-4)] - (-2 + 3 - 4) \cdot [(-81) : (-3) - (-2) \cdot (-10)]$$

7.8

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό

Ορισμός

Το γινόμενο του αριθμού a με τον εαυτό του n φορές συμβολίζεται με a^n και λέγεται **δύναμη με βάση a και εκθέτη n** , όπου ο n είναι φυσικός μεγαλύτερος του 1.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. $a^1 = a$, για κάθε ρητό a .
2. $0^n = 0$, για κάθε φυσικό $n > 1$.
3. $1^n = 1$, για κάθε φυσικό n .
4. Η δύναμη a^n διαβάζεται **νιοστή δύναμη του a ή άλφα στη νιοστή**.
5. Η δύναμη a^2 διαβάζεται **άλφα στη δευτέρα ή τετράγωνο του a ή άλφα στο τετράγωνο**.
6. Η δύναμη a^3 διαβάζεται **άλφα στην τρίτη ή κύβος του a ή άλφα στον κύβο**.
7. Αν ο a είναι ρητός και ο n φυσικός με $a \neq n$, γενικά ισχύει $a^n \neq n^a$.

Παραδείγματα

- ♦ $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +7 \cdot 7 = 49$
- ♦ $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$
- ♦ $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81$
- ♦ $10^1 = 10$
- ♦ $0^{100} = 0$
- ♦ $1^{100} = 1$
- ♦ $5^2 \neq 2^5$, αφού $5^2 = 25$, $2^5 = 32$

Πρόσημο δύναμης

- Δύναμη με βάση θετικό είναι θετικός αριθμός, δηλαδή:

$$\text{αν } a > 0 \text{ και } n > 1 \text{ φυσικός, τότε } a^n > 0$$

- Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός, δηλαδή:

$$\text{αν } a < 0 \text{ και } n > 1 \text{ άρτιος φυσικός, τότε } a^n > 0$$

- Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός, δηλαδή:

$$\text{αν } a < 0 \text{ και } n > 1 \text{ περιττός φυσικός, τότε } a^n < 0$$

Παραδείγματα

- Ισχύει $3^2 > 0$, αφού $a = 3 > 0$ και $n = 2$. Πράγματι: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9 > 0$.
- Ισχύει $(-3)^2 > 0$, αφού $a = -3 < 0$ και $n = 2$ (άρτιος).
Πράγματι: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 > 0$.
- Ισχύει $(-2)^3 < 0$, αφού $a = -2 < 0$ και $n = 3$ (περιττός).
Πράγματι: $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8 < 0$.

Ιδιότητες δυνάμεων

Για τις τιμές των a, β, μ, n που έχουν νόημα οι ακόλουθες ιδιότητες, ισχύουν:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΕΚΦΩΝΗΣΗ	ΙΔΙΟΤΗΤΑ
Γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση	Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.	$a^\mu \cdot a^n = a^{\mu+n}$
Πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση	Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια μη μηδενική βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη με τον εκθέτη του διαιρετέου.	$a^\mu : a^n = \frac{a^\mu}{a^n} = a^{\mu-n} \quad (a \neq 0)$

Γινόμενο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη	Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.	$(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$
Πηλίκο δυνάμεων με τον ίδιο εκθέτη	Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθέναν από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.	$(\alpha : \beta)^v = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v} = \alpha^v : \beta^v \quad (\beta \neq 0)$
Δύναμη υψωμένη σε εκθέτη	Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.	$(\alpha^u)^v = \alpha^{u \cdot v}$

Παραδείγματα

- $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$
- $2^5 \cdot 6^5 = (2 \cdot 6)^5 = 12^5$
- $12^4 : 4^4 = \left(\frac{12}{4}\right)^4 = (12 : 4)^4 = 3^4$
- $3^9 : 3^4 = \frac{3^9}{3^4} = 3^{9-4} = 3^5$
- $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -3^5$
- $((-2)^2)^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 2^6$
- $(-2)^5 \cdot 4^5 = (-2 \cdot 4)^5 = (-8)^5 = -8^5$
- $(-16)^4 : (-8)^4 = \left(\frac{-16}{-8}\right)^4 = (-16 : (-8))^4 = 2^4$
- $(-5)^7 : (-5)^3 = \frac{(-5)^7}{(-5)^3} = (-5)^{7-3} = (-5)^4 = 5^4$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Δεν υπάρχουν ιδιότητες για τις παραστάσεις $\alpha^u + \alpha^v$ και $\alpha^u - \alpha^v$.
2. Για τις τιμές των α, β, v που έχει νόημα η παράσταση, γενικά ισχύει ότι $(\alpha + \beta)^v \neq \alpha^v + \beta^v$.
3. Για τις τιμές των α, β, v που έχει νόημα η παράσταση, γενικά ισχύει ότι $(\alpha - \beta)^v \neq \alpha^v - \beta^v$.

Παραδείγματα

- $(2 + 4)^3 \neq 2^3 + 4^3$, αφού $(2 + 4)^3 = 6^3 = 216$ και $2^3 + 4^3 = 8 + 64 = 72$.
- $(6 - 2)^3 \neq 6^3 - 2^3$, αφού $(6 - 2)^3 = 4^3 = 64$ και $6^3 - 2^3 = 216 - 8 = 208$.

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) 5^2 β) $(-5)^2$ γ) -5^2 δ) $(-5)^3$ ε) -5^3 στ) 5^3

Λύση

α) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

β) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25 = 25$

γ) Στη δύναμη -5^2 δεν υψώνεται το -5 στο τετράγωνο (δεν υπάρχει παρένθεση, όπως στο ερώτημα β), αλλά μόνο το 5 και το μείον παραμένει, οπότε $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$.

$$\begin{aligned} a^v &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{v \text{ παράγοντες}} \\ -a^v &= -\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{v \text{ παράγοντες}} \\ (-a)^v &= \underbrace{(-a) \cdot (-a) \cdot \dots \cdot (-a)}_{v \text{ παράγοντες}} \end{aligned}$$

δ) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = +25 \cdot (-5) = -125$

ε) Στη δύναμη -5^3 δεν υψώνεται το -5 στον κύβο (δεν υπάρχει παρένθεση, όπως στο ερώτημα δ), αλλά μόνο το 5 και το μείον παραμένει, οπότε $-5^3 = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -25 \cdot 5 = -125$.

στ) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$

2. Να βρείτε το πρόσημο των δυνάμεων:

α) $(-19)^{3.457}$ β) $(-23)^{34.560}$ γ) $(+98)^{892}$ δ) $(+48)^{3.091}$

Λύση

α) Επειδή η δύναμη $(-19)^{3.457}$ έχει αρνητική βάση (το -19) και περιττό εκθέτη (το 3.457), το αποτέλεσμα είναι αρνητικό, δηλαδή $(-19)^{3.457} = -19^{3.457} < 0$.

β) Επειδή η δύναμη $(-23)^{34.560}$ έχει αρνητική βάση (το -23) και άρτιο εκθέτη (το 34.560), το αποτέλεσμα είναι θετικό, δηλαδή $(-23)^{34.560} = 23^{34.560} > 0$.

γ) Επειδή η δύναμη $(+98)^{892}$ έχει θετική βάση (το $+98$), το αποτέλεσμα είναι θετικό, δηλαδή $(+98)^{892} > 0$.

δ) Επειδή η δύναμη $(+48)^{3.091}$ έχει θετική βάση (το $+48$), το αποτέλεσμα είναι θετικό, δηλαδή $(+48)^{3.091} > 0$.

3. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

α) $2^5 \cdot 2^3$ **β)** $(-3)^2 \cdot (-3)^3$ **γ)** $(-2)^5 \cdot (-2)^2 \cdot 2$

δ) $2^5 : 2^3$ **ε)** $(-3)^7 : (-3)^3$ **στ)** $(3^{15} \cdot 3^6 \cdot 3) : 3^{19}$

ζ) $(2^5)^3$ **η)** $[(-3)^9]^3$ **θ)** $[(-2)^5]^2$

Λύση

α) $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$]

β) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -3^5$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$]

Η δύναμη $(-3)^5$ έχει αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, άρα το αποτέλεσμα είναι αρνητικό και ισχύει $(-3)^5 = -3^5$.

γ) $(-2)^5 \cdot (-2)^2 \cdot 2 = -2^5 \cdot 2^2 \cdot 2 = -2^{5+2+1} = -2^8$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$]

Η δύναμη $(-2)^5$ έχει αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, άρα το αποτέλεσμα είναι αρνητικό και ισχύει $(-2)^5 = -2^5$.

δ) $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m : a^n = a^{m-n}$]

ε) $(-3)^7 : (-3)^3 = (-3)^{7-3} = (-3)^4 = 3^4$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m : a^n = a^{m-n}$]

Η δύναμη $(-3)^4$ έχει αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό και ισχύει $(-3)^4 = 3^4$.

στ) $(3^{15} \cdot 3^6 \cdot 3) : 3^{19} = 3^{15+6+1} : 3^{19} =$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$]

$= 3^{22} : 3^{19} = 3^{22-19} = 3^3$ [εφαρμογή της ιδιότητας $a^m : a^n = a^{m-n}$]

ζ) $(2^5)^3 = 2^{5 \cdot 3} = 2^{15}$ [εφαρμογή της ιδιότητας $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$]

η) $[(-3)^9]^3 = (-3)^{9 \cdot 3} = (-3)^{27} = -3^{27}$ [εφαρμογή της ιδιότητας $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$]

Η δύναμη $(-3)^{27}$ έχει αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, άρα το αποτέλεσμα είναι αρνητικό και ισχύει $(-3)^{27} = -3^{27}$.

θ) $[(-2)^5]^2 = (-2)^{5 \cdot 2} = (-2)^{10} = 2^{10}$ [εφαρμογή της ιδιότητας $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$]

Η δύναμη $(-2)^{10}$ έχει αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό και ισχύει $(-2)^{10} = 2^{10}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προτεραιότητα των πράξεων: πράξεις στις παρενθέσεις (πρώτα δυνάμεις, μετά πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, τέλος προσθέσεις και αφαιρέσεις), δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, προσθέσεις και αφαιρέσεις.

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(+2) \cdot (+3) + 2^3 + (2 \cdot 4 - 3^2 + 9)$

β) $(-3) \cdot (+4) + 3^3 + (-1)^2 : \frac{1}{5} - [3^2 - (-2) \cdot (-4) - 5 : 5]$

Λύση

α) $(+2) \cdot (+3) + 2^3 + (2 \cdot 4 - 3^2 + 9) =$ [δυνάμεις στην παρένθεση]
 $= (+2) \cdot (+3) + 2^3 + (2 \cdot 4 - 9 + 9) =$ [πολλαπλασιασμοί στην παρένθεση]
 $= (+2) \cdot (+3) + 2^3 + (8 - 9 + 9) =$ [προσθέσεις - αφαιρέσεις στην παρένθεση]
 $= (+2) \cdot (+3) + 2^3 + 8 =$ [δυνάμεις]
 $= (+2) \cdot (+3) + 8 + 8 =$ [πολλαπλασιασμοί - διαιρέσεις]
 $= 6 + 8 + 8 =$ [προσθέσεις - αφαιρέσεις]
 $= 22$

β) $(-3) \cdot (+4) + 3^3 + (-1)^2 : \frac{1}{5} - [3^2 - (-2) \cdot (-4) - 5 : 5] =$ [δυνάμεις στην παρένθεση]
 $= (-3) \cdot (+4) + 3^3 + (-1)^2 : \frac{1}{5} - [9 - (-2) \cdot (-4) - 5 : 5] =$ [πολλαπλασιασμοί - διαιρέσεις στην παρένθεση]
 $= (-3) \cdot (+4) + 3^3 + (-1)^2 : \frac{1}{5} - (9 - 8 - 1) =$ [προσθέσεις - αφαιρέσεις στην παρένθεση]
 $= (-3) \cdot (+4) + 3^3 + (-1)^2 : \frac{1}{5} - 0 =$ [δυνάμεις]
 $= (-3) \cdot (+4) + 27 + 1 : \frac{1}{5} - 0 =$ [πολλαπλασιασμοί - διαιρέσεις]
 $= -12 + 27 + 1 \cdot 5 - 0 =$
 $= -12 + 27 + 5 = 20$ [προσθέσεις - αφαιρέσεις]

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{(-4)^3}{2^3} - \frac{(-18)^4}{(-3)^4} + \frac{10^2}{(-5)^2} \quad B = (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{(-4)^3}{2^3} - \frac{(-18)^4}{(-3)^4} + \frac{10^2}{(-5)^2} = \left(\frac{-4}{2}\right)^3 - \left(\frac{-18}{-3}\right)^4 + \left(\frac{10}{-5}\right)^2 = \\ &= (-2)^3 - 6^4 + (-2)^2 = -8 - 1.296 + 4 = -1.300 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 = \\ &= -2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 = \\ &= -2 - 8 - 32 + 16 + 4 = -42 + 20 = -(42 - 20) = -22 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^v = \frac{\alpha^v}{\beta^v}, \quad \beta \neq 0$$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = (3 + 4)^2, B = 3^2 + 4^2 \quad \beta) \Gamma = (5 - 9)^2, \Delta = 5^2 - 9^2$$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

$$\alpha) A = (3 + 4)^2 = 7^2 = 49 \text{ και } B = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Παρατηρούμε ότι $(3 + 4)^2 \neq 3^2 + 4^2$, δηλαδή $A \neq B$.

$$\beta) \Gamma = (5 - 9)^2 = (-4)^2 = 16 \text{ και}$$

$$\Delta = 5^2 - 9^2 = 25 - 81 = -56.$$

Παρατηρούμε ότι $(5 - 9)^2 \neq 5^2 - 9^2$, δηλαδή $\Gamma \neq \Delta$.

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^v &\neq \alpha^v + \beta^v \\ (\alpha - \beta)^v &\neq \alpha^v - \beta^v \end{aligned}$$

Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1ης στήλης με τα δεδομένα της 2ης στήλης:

	1η στήλη	2η στήλη	
		-16	A
1	$(-2)^2$	-8	B
2	-2^2	-4	Γ
3	$(-2)^3$	4	Δ
4	$(-2)^4$	8	E
5	-2^4	16	ΣΤ
		32	Z

Ασκήσεις προς λύση

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) 6^2 **β)** $(-6)^2$ **γ)** -6^2 **δ)** $(-6)^3$ **ε)** -6^3 **στ)** 6^3

2. Να βρείτε το πρόσημο των δυνάμεων:

α) $(-7)^{876}$ **β)** $(-2)^{9.843}$ **γ)** $(+16)^{709}$ **δ)** $(+72)^{980}$ **ε)** $(-4)^2$ **στ)** $(-5)^{121}$

3. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

α) $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^5$ **β)** $(-4)^3 \cdot (-4)^2$ **γ)** $4 \cdot 4^3 \cdot 4^2$
δ) $(-5)^5 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)$ **ε)** $7^3 \cdot 7^8 \cdot 7^6$ **στ)** $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^9$
ζ) $(-8)^3 \cdot 8^4 \cdot (-8)$ **η)** $2^3 \cdot (-2)^5 \cdot 2^7$ **θ)** $5^6 \cdot (-5)^3 \cdot (-5)^8$

4. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

α) $(-4)^3 : (-4)^2$ **β)** $7^9 : 7^5$ **γ)** $(-2)^6 : (-2)^3$
δ) $(-2)^5 : 2$ **ε)** $(-5)^7 : 5^3$ **στ)** $7^{10} : (-7)^6$

5. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) [(-4)^3]^5 \quad \beta) [(-2)^4]^2 \quad \gamma) (7^4)^5 \quad \delta) [(-5)^{10}]^6$$

$$\epsilon) (3^4)^5 \quad \sigma\tau) [(-7)^3]^2 \quad \zeta) [(7^7)^3]^2 \quad \eta) \{ [(-2)^3]^4 \}^2$$

6. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (-2)^{17} : [(-2)^8 \cdot (-2)^5] \quad \beta) (3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^2) : (3^7 \cdot 3^4)$$

$$\gamma) [(-5)^7 \cdot 5^4] : [5^2 \cdot (-5)^5] \quad \delta) [-2^3 \cdot 2^5 \cdot (-2)^4] : [(-2)^7 \cdot 2^2]$$

7. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \frac{(-3)^9 \cdot (-3)^5}{(-3)^4 \cdot (-3)^2} \quad \beta) \frac{4^9 \cdot 4^2 \cdot 4}{4^7 \cdot 4^5} \quad \gamma) \frac{7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^7}{7^2 \cdot 7^4 \cdot 7^6}$$

$$\delta) \frac{(-2)^9 \cdot 2^3}{(-2)^6 \cdot 2^4} \quad \epsilon) \frac{(-5)^{11} \cdot (-5)^8}{5^9 \cdot (-5)^6} \quad \sigma\tau) \frac{(-6)^8 \cdot (-6)^6}{6^7 \cdot (-6)^4}$$

8. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (5^4)^6 : 5^9 \quad \beta) (2^3)^5 : 2^8 \quad \gamma) [(-4)^5]^7 : [(-4)^9]^3$$

$$\delta) (-3^4)^5 : 3^6 \quad \epsilon) (-7^4)^6 : (-7^9) \quad \sigma\tau) (6^4)^9 : (-6^8)^3$$

9. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (-4)^3 \cdot (-25)^3 \quad \beta) 2^9 \cdot 5^9 \quad \gamma) (-3)^6 \cdot 4^6$$

$$\delta) (-5)^5 \cdot 200^5 \quad \epsilon) (-8)^7 \cdot 5^7 \quad \sigma\tau) 7^8 \cdot 3^8$$

10. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (-16)^8 : (-2)^8 \quad \beta) 20^6 : 5^6 \quad \gamma) (-30)^9 : 15^9$$

$$\delta) (-125)^3 : 5^3 \quad \epsilon) (-72)^7 : 8^7 \quad \sigma\tau) 121^5 : 11^5$$

11. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (2\alpha^3\beta)^2 \quad \beta) (3x^2y^3)^5 \quad \gamma) (5x^2y^6z^3)^2$$

$$\delta) \left(\frac{5}{2} \alpha^2 \beta^3 \gamma \right)^4 \quad \epsilon) \left(\frac{7}{5} \chi^4 \psi \omega^3 \right)^2 \quad \sigma\tau) \left(\frac{2}{3^2} x^3 y^2 z \right)^3$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

12. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) A = (7 + 5)^2, B = 7^2 + 5^2 \quad \beta) \Gamma = (6 - 10)^2, \Delta = 6^2 - 10^2, E = (10 - 6)^2$$

Τι παρατηρείτε σε καθεμία από τις περιπτώσεις;

13. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (3 - 7) \cdot (-2)^5 - 2 \cdot (-3)^3 \quad B = (-2 + 3 - 4)^2 - 11 \cdot (-1)^7$$

$$\Gamma = (-2)^8 : 2^3 + (-5)^3 \quad \Delta = (-17)^0 \cdot (-3)^3 + (-2)^6$$

14. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = 10 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (2^5 - 11 + 9 : 3) \quad B = 8 \cdot (-2)^3 - 3^2 + 3 \cdot 5 - 23 + 25^2 : 5$$

$$\Gamma = 9 - (-2)^5 : (23 + (-2) \cdot (-5) - 11^0) \quad \Delta = 17^1 - 3 \cdot [2^2 \cdot 5^2 - 9 \cdot (-1 + 7)]$$

15. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = [(-2)^3]^2 - \frac{132^2}{11^2} - (-4)^4 - \frac{25^3}{(-5)^3}$$

$$B = (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4$$

$$\Gamma = \frac{(-8)^4}{(-4)^4} - \frac{15^3}{(-5)^3} + \frac{36^2}{(-9)^2}$$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

16. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) (-2)^4 \cdot (7 - 2^2 \cdot 3) + (-3)^2 \cdot (-2 \cdot 5 + 5^2 - 9 \cdot 7)$$

$$\beta) (-100) : (-5)^2 + 7 \cdot (12 - 13)^{21} + (-2)^3 \cdot 7$$

$$\gamma) (-6) \cdot (-3) \cdot (-2)^3 + (-2)^7 : (-4)^2 + (-5)^4$$

$$\delta) (-5 + 9 - 11)^2 \cdot (-2 - 1 - 3) + (-7)^2 - (-1)(-3)(-2)$$

17. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) 45 - (2^5 \cdot 8) : 256 + 5 - 9 + (-1)^{1.999} - 17$$

$$\beta) 3 : \frac{15}{4} + (+4)^2 - 5^3 + 6 \cdot 7 - \frac{5}{7} + \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \left(+\frac{64}{125}\right) + (-2)^{10} - 3^6 + 2 : \left(-\frac{10}{9}\right)$$

$$\delta) -5^3 \cdot \left(\frac{8}{25} + \frac{30}{5} \cdot \frac{4}{25}\right) + (-3)^4 - (-1)(-3)(-2) + (-7) : \left(+\frac{49}{9}\right)$$

$$\epsilon) \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{3}{45}\right) + (-2)^3 : \left(-\frac{4}{7}\right) - 1^{2 \cdot 396} + (-2)^5 : \left(+\frac{16}{9}\right)$$

18. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (-1)^{2v+2} + (-1)^{2v+1}, \text{ όπου } v \text{ είναι φυσικός αριθμός,}$$

$$B = (-1)^v + (-1)^{v+1} + (-1)^{v+2} + (-1)^{v+3}, \text{ όπου } v \text{ είναι φυσικός αριθμός.}$$

19. Αν ο αριθμός v είναι περιττός, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2}{1 - (-1)^v} \cdot \left(4 - \frac{3 + 2 \cdot (-1)^{v+1}}{2 + (-1)^{v+3} - (-1)^{v+2}}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΑΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

20. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$A = \frac{4^{32} \cdot 2^{45}}{8^{28}}$$

$$B = \frac{27^{23} \cdot 9^{37}}{3^{88}}$$

$$\Gamma = \frac{(-125)^{41} \cdot 5^{14}}{25^{67}}$$

21. Αν $\frac{x}{y} = -2$, να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$A = \frac{(8x^2y^3)^4 \cdot x^{11}}{2^5 \cdot (x^5y^4)^2 \cdot y^{13}}$$

$$B = \frac{(16x^4y^2)^3 \cdot x^7 \cdot y^{11}}{(2xy^3)^9}$$

22. Αν ο αριθμός v είναι φυσικός, να υπολογίσετε με τη βοήθεια του v την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{8^{v+1} + 2^{3v+1}}{10 \cdot 4^v}$$

7.9

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο

Ισχύει ότι:

➤ $\alpha^0 = 1, \alpha \neq 0.$

➤ $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^v$, όπου $\alpha \neq 0$ ρητός και v ακέραιος.

Δηλαδή η δύναμη κάθε μη μηδενικού αριθμού με ακέραιο αρνητικό εκθέτη είναι ίση με το κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με τον αντίθετο εκθέτη.

➤ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$, όπου $\alpha, \beta \neq 0$ ρητοί και v ακέραιος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Οι ιδιότητες των δυνάμεων ισχύουν και για ακέραιους εκθέτες.
2. Η δύναμη 0^0 δεν έχει νόημα.
3. $10^{-v} = 0,1^v = \underbrace{0,000\dots001}_{v \text{ μηδενικά}}$ και $0,1^{-v} = 10^v = \underbrace{10000\dots00}_{v \text{ μηδενικά}}$, $v > 1$ φυσικός.

Παραδείγματα

➤ $(-123.456)^0 = 1$

➤ $7^{-3} = \left(\frac{7}{1}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1^3}{7^3} = \frac{1}{343}$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16}$$

➤ $0,0001 = 0,1^4 = 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000}$

$$0,1^{-5} = 10^5 = 100.000$$

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$\alpha) 5^{-1} \quad \beta) (-4)^{-3} \quad \gamma) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \quad \delta) \left(-\frac{7}{2}\right)^{-3} \quad \varepsilon) (-987.654)^0$$

Λύση

$$\alpha) 5^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$$

$$\beta) (-4)^{-3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\left(\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1}{4^3} = -\frac{1}{64}$$

$$\gamma) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$\delta) \left(-\frac{7}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{7}\right)^3 = -\left(\frac{2}{7}\right)^3 = -\frac{2^3}{7^3} = -\frac{8}{343}$$

$$\varepsilon) (-987.654)^0 = 1$$

Αν $\alpha, \beta \neq 0$, έχουμε:

$$\triangleright \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v, v > 1 \text{ φυσικός.}$$

$$\triangleright \alpha^0 = 1.$$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$\alpha) 10^{-5} \quad \beta) 0,1^{-6} \quad \gamma) 10^{-4} \quad \delta) 0,1^{-3}$$

Λύση

$$\alpha) 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100.000} = 0,00001$$

$$\beta) 0,1^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-6} = 10^6 = 1.000.000$$

$$\gamma) 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001$$

$$\delta) 0,1^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 10^3 = 1.000$$

$$\triangleright 10^{-v} = 0,1^v = \underbrace{0,000\dots001}_{v \text{ μηδενικά}}$$

$$\triangleright 0,1^{-v} = 10^v = \underbrace{10000\dots00}_{v \text{ μηδενικά}}$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) (-2)^{-4} \cdot (-2)^{-5} \qquad \beta) (-3)^{-2} : 3^{-3} \qquad \gamma) [(-2)^3]^{-4}$$

$$\delta) (-5)^{-5} \cdot 2^{-5} \qquad \epsilon) 24^{-6} : (-12)^{-6}$$

Λύση

$$\alpha) (-2)^{-4} \cdot (-2)^{-5} = (-2)^{-4-5} = (-2)^{-9} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\left(\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{1}{2^9} = -\frac{1}{512}$$

$$\beta) (-3)^{-2} : 3^{-3} = 3^{-2} : 3^{-3} = 3^{-2-(-3)} = 3^{-2+3} = 3^1 = 3$$

$$\gamma) [(-2)^3]^{-4} = (-2)^{3 \cdot (-4)} = (-2)^{-12} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4.096}$$

$$\delta) (-5)^{-5} \cdot 2^{-5} = (-5 \cdot 2)^{-5} = (-10)^{-5} = \left(-\frac{1}{10}\right)^5 = -\left(\frac{1}{10}\right)^5 = -\frac{1}{10^5} = -\frac{1}{100.000}$$

$$\epsilon) 24^{-6} : (-12)^{-6} = [24 : (-12)]^{-6} = (-2)^{-6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 10^{-3} \cdot x = 10^5 \qquad \beta) (10^{-2})^3 \cdot 10^9 \cdot x = 10^2 \qquad \gamma) 3^{10} \cdot x = 3^6$$

Λύση

$$\alpha) 10^{-3} \cdot x = 10^5 \text{ ή } x = 10^5 : 10^{-3} \text{ ή } x = 10^{5-(-3)} \text{ ή } x = 10^8$$

$$\beta) (10^{-2})^3 \cdot 10^9 \cdot x = 10^2 \text{ ή } 10^{-2 \cdot 3} \cdot 10^9 \cdot x = 10^2 \text{ ή } 10^{-6} \cdot 10^9 \cdot x = 10^2 \text{ ή}$$

$$10^{-6+9} \cdot x = 10^2 \text{ ή } 10^3 \cdot x = 10^2 \text{ ή } x = 10^2 : 10^3 \text{ ή } x = 10^{2-3} \text{ ή } x = 10^{-1}$$

$$\gamma) 3^{10} \cdot x = 3^6 \text{ ή } x = 3^6 : 3^{10} \text{ ή } x = 3^{6-10} \text{ ή } x = 3^{-4} \text{ ή } x = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \text{ ή } x = \frac{1}{3^4} \text{ ή } x = \frac{1}{81}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ

Προτεραιότητα των πράξεων: πράξεις στις παρενθέσεις (πρώτα δυνάμεις, μετά πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, τέλος προσθέσεις και αφαιρέσεις), δυνάμεις, πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, προσθέσεις και αφαιρέσεις.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (-2)^{-2} + (-2)^{-1} + (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 \quad B = \frac{(-5)^{-3}}{15^{-3}} + \frac{(-6)^{-2}}{(-24)^{-2}} - \frac{(-17)^{-4}}{(-34)^{-4}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= (-2)^{-2} + (-2)^{-1} + (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 - 2 + 4 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} - \frac{8}{4} + \frac{16}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(-5)^{-3}}{15^{-3}} + \frac{(-6)^{-2}}{(-24)^{-2}} - \frac{(-17)^{-4}}{(-34)^{-4}} = \\ &= \left(\frac{-5}{15}\right)^{-3} + \left(\frac{-6}{-24}\right)^{-2} - \left(\frac{-17}{-34}\right)^{-4} = \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \\ &= (-3)^3 + 4^2 - 2^4 = \\ &= -27 + 16 - 16 = -27 \end{aligned}$$

6. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 5^{x-2} + 5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}, \text{ για } x = -1$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 5^{-1-2} + 5^{-1-1} + 5^{-1} + 5^{-1+1} + 5^{-1+2} = 5^{-3} + 5^{-2} + 5^{-1} + 5^0 + 5^1 = \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + 5^0 + 5^1 = \frac{1}{125} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} + 1 + 5 = \\ &= \frac{1}{125} + \frac{5}{125} + \frac{25}{125} + \frac{125}{125} + \frac{625}{125} = \frac{781}{125} \end{aligned}$$

Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λανθασμένες (Λ):

1. Αν $a \neq 0$, ο αντίστροφος του a είναι ο a^{-1} .
2. $[(-3)^7]^{-8} > 0$.
3. $0^0 = 1$.
4. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-5} < 0$.
5. $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$.

Ασκήσεις προς λύση

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 4^{-2}

β) $(-3)^{-4}$

γ) 5^{-3}

δ) $(-2)^{-7}$

ε) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$

στ) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}$

ζ) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

η) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $(-8)^0$

β) $\left(-\frac{9}{2}\right)^0$

γ) $\left(\frac{7}{4}\right)^0$

δ) $(-1.023.498)^0$

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 10^{-3}

β) $0,1^{-4}$

γ) 10^{-7}

δ) $0,1^{-5}$

ε) 10^{-5}

στ) $0,1^{-7}$

ζ) 10^{-4}

η) $0,1^{-6}$

4. Να συγκρίνετε με το μηδέν τις δυνάμεις:

$$\alpha) (-2)^{-7} \quad \beta) \left(+\frac{2}{7}\right)^{-5} \quad \gamma) \left(-\frac{11}{3}\right)^{-4} \quad \delta) \left(-\frac{7}{2}\right)^{-9}$$

5. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 2^{-5} \cdot 2^3 \quad \beta) (-2)^{-7} \cdot (-2)^{-4} \quad \gamma) (-3)^{-9} \cdot 3^6 \quad \delta) 5^{-9} \cdot (-5)^7$$

6. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 2^{-7} \cdot 4^8 \cdot 8^{-2} \quad \beta) 3^{10} \cdot 9^{-7} \cdot 27^{-3} \quad \gamma) 125^3 \cdot 625^{-7} \cdot 25^2$$

7. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 2^{-5} : 2^{-7} \quad \beta) (-3)^{-7} : (-3)^{-2} \quad \gamma) (-4)^{-8} : 4^{-3} \quad \delta) 6^{-7} : (-6^{-2})$$

8. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) [(-2)^{-2}]^{-5} \quad \beta) [(-4)^{-2}]^3 \quad \gamma) (5^{-2})^2 \quad \delta) (-3^{-2})^3$$

9. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (-7)^{-2} \cdot 3^{-2} \quad \beta) 3^{-3} \cdot 4^{-3} \quad \gamma) 5^{-5} \cdot (-8)^{-5} \quad \delta) (-2)^{-4} : (-5)^{-4}$$

10. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 51^{-3} : (-17)^{-3} \quad \beta) (-81)^{-5} : (-27)^{-5} \quad \gamma) 100^{-4} : 20^{-4} \quad \delta) (-12)^{-9} : 6^{-9}$$

11. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \frac{12^{-5}}{(-3)^{-5}} \quad \beta) \frac{(-7)^{-3}}{(-21)^{-3}} \quad \gamma) \frac{(-12)^{-4}}{16^{-4}} \quad \delta) \frac{100^{-5}}{(-5)^{-10}}$$

12. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \frac{2^{-5} \cdot 2^3}{2^{-2} \cdot 2^{-8}} \quad \beta) \frac{7^{-8} \cdot 7}{7^{-5} \cdot 7^9} \quad \gamma) \frac{3^4 \cdot 3^{-2}}{(-3)^9 \cdot 3^{-7}} \quad \delta) \frac{2^9 \cdot 4^{-5}}{8^{-3} \cdot 16^2}$$

13. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης του 10:

$$\alpha) \frac{10^{-7} \cdot 10^4}{10^{-3} \cdot 10^8} \quad \beta) \frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{10^{-7} \cdot 10^9} \quad \gamma) \frac{(-10)^{-6} \cdot 10^{-5}}{(-10)^7 \cdot 10^{-3}} \quad \delta) \frac{10^9 \cdot 0,1^{-10}}{100^{-5} \cdot 10^{-2}}$$

14. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης του 0,1:

$$\alpha) \frac{0,1^5 \cdot 0,1^{-3}}{0,1^7 \cdot 0,1^{-4}} \quad \beta) \frac{0,1^7 \cdot 0,1^{-4}}{0,1^{-9} \cdot 0,1^{-2}} \quad \gamma) \frac{0,1^{11} \cdot 0,1^{-9}}{(-0,1)^8 \cdot 0,1^{-15}} \quad \delta) \frac{0,1^5 \cdot 0,1^{-9}}{10^{-7} \cdot 0,1^{-2}}$$

15. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) \left(-\frac{2}{3}\right)^{10} : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^5$$

$$\beta) [(-2)^7]^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{55}$$

$$\gamma) \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} \left(\frac{5}{2}\right)^4 \left(-\frac{5}{2}\right)^5\right] : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^3$$

$$\delta) \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{8}\right)^{-1} : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{1}{9}\right]$$

16. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	$-0,01$	10^3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$6 \cdot 10^4$
x^{-1}					
x^{-3}					

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

17. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (-2)^{-12} \cdot 2^4 + (-2)^{-7} \cdot (-2)^{-3}$$

$$B = \frac{(-5)^{-3}}{(-25)^{-3}} + \frac{6^{-2}}{(-36)^{-2}} - \frac{(-11)^{-5}}{(-22)^{-5}}$$

$$\Gamma = \frac{10^3 \cdot (-10)^{-7} \cdot 10^6 \cdot 10^5}{(-10)^{-2} \cdot (-10)^9 \cdot 10^8}$$

$$\Delta = \frac{2^3 \cdot 4^2 \cdot (-8)^5}{16^{-2} \cdot (-32)^4}$$

18. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (-2)^2 : (-2)^{-3} - (-5) \cdot (-4) + 19 - 32 + 4$$

$$B = -23 + 12 : (-2) + 16 \cdot 2^{-3} - 11 - 12 - 13$$

$$\Gamma = (-3)^4 : 27 + 16 \cdot 2^{-3} - 5 \cdot (18 : 9 - 9 \cdot 6) - 19^0$$

$$\Delta = (-2)^3 \cdot (-3)^2 + 34 - 6 \cdot 5 + (-5)^{-2} \cdot 200$$

19. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (-3)^{-2} + (-3)^{-1} + (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2$$

$$B = (-2)^{-3} \cdot (+16) + 2 \cdot [3 + (-4) \cdot 7 - (-5) + (-8)^{-2} : 2^{-7}]$$

$$\Gamma = (-18)^3 : 9^2 - 3^4 + (12^{-2})^{-1} : [(-5)^2 \cdot 2 - (+7) \cdot (-3) + 4^0]$$

$$\Delta = [(-7)^{-2} : 21^{-2} - (-2)^{-2} \cdot 20 - 12] : [(-8)^{-3} \cdot 1.024 + (-5) \cdot (-2)]$$

20. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} + 4 \cdot 2^3 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(-\frac{1}{8}\right)^5 \cdot 2^{20}$$

$$B = (16^2 \cdot 8^{-4} \cdot 4^3)^2 : [11^0 - (-5) \cdot 3] - (-5)^{-2} : 25^{-1}$$

$$\Gamma = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot 4 + 5^{-1} \cdot \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 25^2 + (-3)^3 + 2\right]$$

21. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 4^{x-4} + 4^{x-3} + 4^{x-2} + 4^{x-1}, \text{ για } x = 2,$$

$$B = (x+5) \cdot 2^{x+3} + (x-2) \cdot 3^{x+2} + (x-3) \cdot 2^{x+1} - (x+3) \cdot 1.258^x, \text{ για } x = 0,$$

$$\Gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{-x} - (x-1) \cdot 2^{-x+1}, \text{ για } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 10^{-7} \cdot x = 10^{-9} \quad \beta) 10^{12} \cdot x = (10^2)^{-1} \quad \gamma) (10^{-1})^{-5} \cdot (x+2) = 100^3$$

$$\delta) 4^{-6} \cdot x = (-8)^{-5} \quad \epsilon) 9^7 \cdot x = 27^{-4} \quad \sigma\tau) (10^{-2})^6 \cdot (x-2) = (10^5)^{-3}$$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 4^9 \cdot x = (-4)^7 \quad \beta) 6^{-5} \cdot x = 12^{-5} \quad \gamma) 5^6 \cdot x = 5^4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΑΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

24. Αν $xy = -2$, να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$A = (3x^2y^{-1})^2 \cdot (18y^{-6})^{-1} \quad B = (2^{11}x^{-3}y^{-5})^{-2} \cdot (x^7y^6)^4$$

$$\Gamma = \frac{(24x^{-3}y^5)^2 y^{17}}{9 \cdot (2^{-4}x^5y^{-6})^{-3}} \quad \Delta = \frac{6^4(x^2y^{-3})^{-2}}{(3x^{-5}y^{-4})^4} \cdot \left(\frac{x}{16}\right)^6$$

25. Αν $a \neq 0$, $x = a^7$ και $y = a^{-3}$, να εκφράσετε με τη βοήθεια των x , y τα:

$$\alpha) a^4 \quad \beta) a^{11} \quad \gamma) a \quad \delta) a^5$$

26. Αν $A = \frac{2^{-v} + 2^v}{4^v + 1}$ και $B = \frac{(4^{2v} + 1)(4^{2v} - 1)}{16^v - 4^{-2v}}$, όπου ο v είναι μη μηδενικός φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι $B = A^{-4}$.

7.10

Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

Ορισμός

Τυποποιημένη μορφή ενός θετικού ρητού αριθμού είναι η μορφή με την οποία μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό, ως γινόμενο ενός αριθμού a που είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 1 και μικρότερος του 10 με κατάλληλη δύναμη του 10.

- ♦ Η τυποποιημένη μορφή των θετικών ρητών που είναι **μεγαλύτεροι του 10** είναι:

$$a \cdot 10^n, \text{ με } 1 \leq a < 10 \text{ και } n \text{ φυσικός}$$

- ♦ Η τυποποιημένη μορφή των θετικών ρητών που είναι **μικρότεροι του 1** είναι:

$$a \cdot 10^{-n}, \text{ με } 1 \leq a < 10 \text{ και } n \text{ φυσικός}$$

Παραδείγματα

➤ $40.000 = 4 \cdot 10^4$

➤ $11.000.000 = 1,1 \cdot 10^7$

➤ $0,00304 = 3,04 \cdot 10^{-3}$

➤ $0,000946 = 9,46 \cdot 10^{-4}$

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΜΟΡΦΗ

- 1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:**

α) 80.700

β) 987.654.321

γ) $10.000 : 0,00005$

Λύση

α) $80.700 = 8,07 \cdot 10^4$

β) $987.654.321 = 9,87654321 \cdot 10^8$

γ) $10.000 : 0,00005 = 200.000.000 = 2 \cdot 10^8$

$$a \cdot 10^n, 1 \leq a < 10, \\ n \text{ φυσικός}$$

2. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α) 0,00000003

β) 0,000567

γ) 0,00005 : 10.000

Λύση

α) $0,00000003 = 3 \cdot 10^{-8}$

β) $0,000567 = 5,67 \cdot 10^{-4}$

γ) $0,00005 : 10.000 = 0,000000005 = 5 \cdot 10^{-9}$

$$\alpha \cdot 10^{-\nu}, 1 \leq \alpha < 10,$$

ν φυσικός

Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1ης στήλης με τα δεδομένα της 2ης στήλης:

	1η στήλη	2η στήλη	
		$1,3 \cdot 10^{-1}$	A
1	0,0013	$1,3 \cdot 10^2$	B
2	1.300.000	$1,3 \cdot 10^{-3}$	Γ
3	0,000013	$1,3 \cdot 10^3$	Δ
4	1.300	$1,3 \cdot 10^{-5}$	E
5	0,13	$1,3 \cdot 10^6$	ΣΤ
		$1,3 \cdot 10^{-7}$	Z

Ασκήσεις προς λύση

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α) 64.000

β) 700.000.000

γ) 316.000

δ) 5.040.000

ε) 6.708.100.000

στ) 9.680

2. Να γράψετε τους αριθμούς:

α) $3,8 \cdot 10^2$

β) $5,1 \cdot 10^5$

γ) $4,01 \cdot 10^3$

δ) $7,108 \cdot 10^8$

ε) $9,0203 \cdot 10^7$

στ) $8,12 \cdot 10^4$

3. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α) $432 \cdot 10^2$

β) $51 \cdot 10^4$

γ) $304 \cdot 10^3$

- δ)** $92.456 \cdot 10$ **ε)** $2.303 \cdot 10^5$ **στ)** $206 \cdot 10^6$
- 4.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:
- α)** 0,005 **β)** 0,000054 **γ)** 0,000106
δ) 0,00000042 **ε)** 0,000000000509 **στ)** 0,034
- 5.** Να γράψετε τους αριθμούς:
- α)** $3,8 \cdot 10^{-2}$ **β)** $5,1 \cdot 10^{-5}$ **γ)** $4,01 \cdot 10^{-3}$
δ) $7,108 \cdot 10^{-8}$ **ε)** $9,0203 \cdot 10^{-7}$ **στ)** $8,12 \cdot 10^{-4}$
- 6.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:
- α)** $432 \cdot 10^{-5}$ **β)** $51 \cdot 10^{-4}$ **γ)** $304 \cdot 10^{-3}$
δ) $92.456 \cdot 10^{-1}$ **ε)** $2.303 \cdot 10^{-5}$ **στ)** $206 \cdot 10^{-6}$
- 7.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:
- α)** $45.000 : 0,0003$ **β)** $650.000 : 0,000001$ **γ)** $9.800.000 : 0,000002$
δ) $0,0007 : 100.000$ **ε)** $0,05 : 1.000.000$ **στ)** $0,000005 : 20.000$
- 8.** Να συγκρίνετε τα ζεύγη των αριθμών:
- α)** $4,02 \cdot 10^{-3}$ και $5,01 \cdot 10^{-3}$ **β)** $6,34 \cdot 10^{-5}$ και $4,99 \cdot 10^{-5}$
γ) $0,34 \cdot 10^{-5}$ και $2,1 \cdot 10^{-6}$ **δ)** $0,0012 \cdot 10^2$ και $1,2 \cdot 10^{-1}$
- 9.** Να μετατρέψετε σε gr και σε τυποποιημένη μορφή τα:
- α)** 4,02 kg **β)** 0,0034 kg **γ)** $2,42 \cdot 10^{-5}$ kg **δ)** $0,056 \cdot 10^{-4}$ kg

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΑΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

- 10.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τα αποτελέσματα των παραστάσεων:
- α)** $0,0342 \cdot 10^{-8} + 2,07 \cdot 10^{-10}$ **β)** $2,4 \cdot 10^{-8} + 0,0049 \cdot 10^{-5}$
γ) $0,0012 \cdot 10^{-5} + 7,1 \cdot 10^{-8}$ **δ)** $0,095 \cdot 10^{-4} + 4,1 \cdot 10^{-6}$
- 11.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τα αποτελέσματα των παραστάσεων:
- α)** $0,0342 \cdot 10^{-8} - 2,07 \cdot 10^{-10}$ **β)** $9,4 \cdot 10^{-8} - 0,0049 \cdot 10^{-5}$
γ) $0,0082 \cdot 10^{-5} - 7,1 \cdot 10^{-8}$ **δ)** $0,095 \cdot 10^{-4} - 4,2 \cdot 10^{-6}$
- 12.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τα αποτελέσματα των παραστάσεων:
- α)** $0,0342 \cdot 10^{-8} \cdot 2,07 \cdot 10^{-10}$ **β)** $9,4 \cdot 10^{-8} \cdot 0,0049 \cdot 10^{-5}$
γ) $0,0082 \cdot 10^{-5} \cdot 7,1 \cdot 10^{-8}$ **δ)** $0,095 \cdot 10^{-4} \cdot 4,2 \cdot 10^{-6}$

Ασκήσεις επανάληψης

1. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^4 \quad \beta) 3^{12} \cdot 3^9 \cdot 3^5 \quad \gamma) (-2)^2 \cdot 2^4 \cdot (-2)^5$$

$$\delta) 5^{11} : 5^4 \quad \epsilon) 7^9 : 7^4 \quad \sigma\tau) 11^{11} : (-11)^5$$

2. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \frac{(-2)^7 \cdot (-2)^6}{(-2)^3 \cdot (-2)^8} \quad \beta) \frac{3^9 \cdot 3^6 \cdot 3}{3^{11} \cdot 3^5} \quad \gamma) \frac{(-7)^3 \cdot 7^8 \cdot 7^4}{7^5 \cdot (-7)^4 \cdot 7}$$

3. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) [(-2)^5]^2 \quad \beta) (3^3)^4 \quad \gamma) \left\{ [(-3)^2]^3 \right\}^4$$

$$\delta) (3^2)^4 : 3^6 \quad \epsilon) 5^{19} : (5^3)^5 \quad \sigma\tau) [(-4)^4]^9 : [(-4)^{12}]^3$$

4. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 3^{14} \cdot 3^4 : (3^8 \cdot 3^2) \quad \beta) (-2)^{15} \cdot 2^3 : 2^{11} \quad \gamma) (-5)^9 \cdot 5^3 : [5^5 \cdot (-5)^2]$$

5. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) (-8)^3 \cdot (-2)^3 \quad \beta) 15^9 \cdot 5^9 \quad \gamma) (-16)^4 \cdot 4^4$$

$$\delta) (-25)^7 : 5^7 \quad \epsilon) (-54)^5 : 9^5 \quad \sigma\tau) (-18)^9 : (-6)^9$$

6. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) 3^{-7} \cdot 3^4 \cdot 3^{-5} \quad \beta) 2^{13} \cdot 2^{-7} \cdot 2^{-9} \quad \gamma) (-5)^{-3} \cdot 5^{15} \cdot (-5)^{-4}$$

$$\delta) (-5)^3 : (-5)^{-2} \quad \epsilon) 7^{-6} : 7^{-2} \quad \sigma\tau) 2^{-9} : 2^3$$

7. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \frac{5^{-6} \cdot 5^3}{5^4 \cdot 5^{-8}} \quad \beta) \frac{2^{-7} \cdot 2^{-6} \cdot 2}{2^{-11} \cdot 2^5} \quad \gamma) \frac{3^{-5} \cdot (-3)^2 \cdot 3^{-8}}{(-3)^{-4} \cdot 3^2 \cdot 3^{-7}}$$

8. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) [(-5)^{-3}]^5 \quad \beta) (3^{-2})^{-9} \quad \gamma) \left\{ [(-2)^{-3}]^4 \right\}^{-2}$$

9. Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

$$\alpha) \left(-\frac{2}{7}\right)^{14} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^5 : \left[\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}\right]^{-6}$$

$$\beta) \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^7 \left(-\frac{5}{2}\right)^{-3} \left(-\frac{5}{2}\right)^{12}\right] : \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\right]^2$$

10. Δίνεται η παράσταση $A = ((-2)^2)^3 : (2 \cdot 5 + 2 \cdot 3) - (-2)^{-2} \cdot 12$. Να βρείτε τον αντίθετο, τον αντίστροφο και την απόλυτη τιμή του A .

11. Να βρείτε τα αποτελέσματα των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 2^{1-x} + 2^{-x} + 2^x + 2^{1+x}, \text{ για } x = -2,$$

$$B = (x+2) \cdot 2^{1-x} - (x-1)^2 \cdot 4^x + (x+1)^x \cdot (-4)^2, \text{ για } x = -3.$$

12. Να βρείτε τα αποτελέσματα των αριθμητικών παραστάσεων:

$$A = 4^{-2} \cdot 2^7 - (-2)^{-5} \cdot (3^4 - 17) - (-12)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{24^{-1}} - 36\right)$$

$$B = 9^{-6} : (-3)^{-13} - ((-2)^3)^{-4} \cdot (-4)^7 + 25 \cdot (5^{-2} + 5^{-1})$$

13. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) -3^2 \cdot (4 \cdot 7^0 - 3^2 \cdot 5) - (-3)^2 \cdot (-7 \cdot 5 + 4^2 - 3 \cdot 4)$$

$$\beta) (-10^2) : (-5)^2 - (-2)^3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 + 13)^{21} + (-1)^{13} \cdot 7$$

$$\gamma) (-8)^3 : (-2^6) - (-3)^2 \cdot 2^3 + (-2)^3 \cdot (-100)^0$$

$$\delta) (-5 - 9 + 2 \cdot 6)^7 : (-7 + 3)^3 + (-6)^2 + (-5)^3$$

14. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης:

$$\alpha) [(-2) : 3^{-3} + (-5)^2 \cdot 4 - 5^3] \cdot (-3 \cdot 2 + 72 : 18) + (-1)^{-2} \cdot (-7^2) \cdot (-2)^3$$

$$\beta) (-10^{-2}) : (-20)^{-2} - (-2)^{-3} \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 - 2)^2 + (-1)^{-13} \cdot (-4)$$

$$\gamma) (-4)^{-3} : (-8^{-2}) + (-6)^{-2} \cdot 2^3 \cdot (-9)^3 - 7^{-2} \cdot (-2^3 \cdot 6 - 1.821^0)$$

$$\delta) (-6^2 \cdot 12^{-1})^3 - 2 : (-2)^{-5} + 4 : (-2)^{-3} + (-3)^2 \cdot (-2)^3$$

Κριτήριο αξιολόγησης

Θέμα 1ο

α) Με τι ισούται η δύναμη ενός μη μηδενικού αριθμού με ακέραιο αρνητικό εκθέτη;

Να εκφράσετε τη σχέση αυτή με τη βοήθεια μεταβλητών.

β) Να γράψετε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

γ) Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1ης στήλης με τα δεδομένα της 2ης στήλης:

	1η στήλη	2η στήλη	
		$(-6)^1$	A
1	$(-6)^4 \cdot (-6)^3$	$(-6)^7$	B
2	$(-6)^4 : (-6)^3$	$(-6)^{12}$	Γ
3	$((-6)^4)^3$	$(-2)^4$	Δ
4	$(-6)^4 \cdot (-3)^4$	$(-2)^1$	E
5	$(-6)^4 : (-3)^4$	$(+18)^4$	ΣΤ
		$(+18)^{16}$	Z

Θέμα 2ο

Να βρείτε τα αποτελέσματα με τη βοήθεια μιας δύναμης:

α) $7^{-5} \cdot 7^3 : 7^{-9}$ β) $(2^3)^{-2} \cdot 2^9 \cdot 2^{-11}$ γ) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^{-6}$

Θέμα 3ο

Για $x = -2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (x + 10) \cdot 2^{x-2} + 4^{-x} \cdot x^{-4} - (2^x)^{-3}$$

Θέμα 4ο

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = [-5 \cdot (-3) + 40 \cdot (-5)^{-1}] - (-7 - 4 - 5 + 9^0) + (-2)^{-2} \cdot [(-3)^3 + 5 \cdot (-7) - 2 \cdot (-21)]$$

1.1

Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις

Ορισμοί

1. **Μεταβλητή** ονομάζεται το γράμμα (ελληνικό $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ή λατινικό x, y, t, \dots) που παριστάνει έναν οποιονδήποτε αριθμό.
2. **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται η παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς.
3. **Αλγεβρική παράσταση** ονομάζεται η παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές. Οι προσθετέοι της παράστασης λέγονται **όροι** αυτής.
4. **Αναγωγή ομοίων όρων** ονομάζεται η διαδικασία με την οποία γράφουμε σε απλούστερη μορφή μια αλγεβρική παράσταση, προσθέτοντας ή αφαιρώντας τους όρους που έχουν ίδιες μεταβλητές υψωμένες στις ίδιες δυνάμεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το επί (\cdot) μεταξύ αριθμού και μεταβλητής ή μεταξύ μεταβλητών μπορεί να παραλείπεται, δηλαδή $x \cdot y = xy$.
2. $1x = 1 \cdot x = x$.
3. Για την αναγωγή ομοίων όρων χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Χρήσιμη είναι και η ισοδύναμη μορφή της $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.
4. Στην αναγωγή ομοίων όρων προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) όρους που έχουν ακριβώς τις ίδιες μεταβλητές υψωμένες στις ίδιες δυνάμεις με τους όρους στους οποίους κάνουμε πράξεις. Τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις των όρων που δεν έχουν μεταβλητές (είναι αριθμοί) τις κάνουμε χωριστά.

Παραδείγματα

- $5x = 5 \cdot x, 3 \cdot y = 3y, x \cdot y \cdot w = xyw$.
- Αριθμητικές παραστάσεις: $2 \cdot (-3 + 6 - 3) - 2 \cdot (-3)^2, (-2)^3 + (12 : 2 - 5 \cdot 13) \cdot 2$.
- Αλγεβρικές παραστάσεις: $-2 \cdot (-3\alpha + 3) + 8\alpha, 2(x + 1) + 3y - 4x$.

- Αναγωγή ομοίων όρων: $7 \cdot \alpha + 15 \cdot \alpha = (7 + 15) \cdot \alpha = 22 \cdot \alpha$,
 $2 \cdot x - 5 \cdot x + x = (2 - 5 + 1) \cdot x = -2 \cdot x$,
 $\alpha - 2 \cdot (-3\alpha + 3) + 8\alpha + 2 = \alpha + 6\alpha - 6 + 8\alpha + 2 = (1 + 6 + 8)\alpha - 6 + 2 = 15\alpha - 4$.
- Στις αλγεβρικές παραστάσεις $5x + 3y - 2$, $5x + 3xy - 2y$ δεν υπάρχουν όμοιοι όροι για να κάνουμε αναγωγή.

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΕΚΦΡΑΣΗ ΜΙΑΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ Ή ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- 1.** Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μεταβλητών:
- Το τριπλάσιο ενός αριθμού ελαττώνεται κατά 2.
 - Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξάνεται κατά 1.
 - Το $\frac{1}{3}$ ενός αριθμού αυξάνεται κατά το μισό του αρχικού αριθμού.
 - Το τετραπλάσιο του αθροίσματος δύο αριθμών είναι μεγαλύτερο από 3.
 - Η περίμετρος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με 15 cm.

Λύση

- Αν x είναι ο αριθμός, τότε $3x$ είναι το τριπλάσιό του,
 άρα $3x - 2$ είναι το τριπλάσιο του αριθμού ελαττωμένο κατά 2.
- Αν x είναι ο αριθμός, τότε το πενταπλάσιό του είναι $5x$,
 άρα $5x + 1$ είναι το πενταπλάσιο του αριθμού αυξημένο κατά 1.
- Αν x είναι ο αριθμός, τότε το $\frac{1}{3}$ του είναι $\frac{1}{3} \cdot x$, το μισό του είναι $\frac{1}{2} \cdot x$,
 άρα το $\frac{1}{3}$ του αριθμού αυξημένο κατά το μισό του είναι $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{3} + \frac{x}{2}$.
- Θεωρούμε δύο αριθμούς x και y , οπότε το άθροισμά τους είναι $x + y$,
 το τετραπλάσιο του αθροίσματος είναι $4 \cdot (x + y)$,
 άρα η ζητούμενη παράσταση είναι $4 \cdot (x + y) > 3$.

- ε) Θεωρούμε x cm το μήκος και y cm το πλάτος του ορθογώνιου, με $x, y > 0$.
 Τότε η περίμετρος του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι $2x + 2y$.
 Επομένως θα ισχύει $2x + 2y = 15$.

- 2. Σε μια ιδιωτική επιχείρηση γίνεται αύξηση των μισθών των υπαλλήλων κατά 12%. Να εκφράσετε τον νέο μισθό του κάθε υπαλλήλου με τη βοήθεια του παλιού μισθού.**

Λύση

Έστω x € ($x > 0$) ο αρχικός μισθός ενός υπαλλήλου της ιδιωτικής επιχείρησης, οπότε η αύξηση είναι $12\% \cdot x$ €.

Τότε ο νέος μισθός του υπαλλήλου (σε €) θα είναι:

$$x + 12\% \cdot x = x + \frac{12}{100} \cdot x = x + 0,12 \cdot x = (1 + 0,12) \cdot x = 1,12 \cdot x.$$

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- 3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $4x + 2x - 8x$

β) $2t - 4t + 6t + t - 7t$

γ) $-8x + (5x - x) - (3x + 2x)$

δ) $3y - [-9y - 2 \cdot (-3y + 2y)] + y$

Λύση

α) $4x + 2x - 8x = (4 + 2 - 8)x = -2x$

$\beta\alpha + \gamma\alpha = (\beta + \gamma)\alpha$

β) $2t - 4t + 6t + t - 7t = (2 - 4 + 6 + 1 - 7)t = -2t$

γ) $-8x + (5x - x) - (3x + 2x) =$

$= -8x + 5x - x - 3x - 2x =$

$= 5x - 8x - x - 3x - 2x =$

$= 5x - 14x = -9x$

$+(a + \beta - \gamma) = a + \beta - \gamma$

$-(a + \beta - \gamma) = -a - \beta + \gamma$

δ) $3y - [-9y - 2 \cdot (-3y + 2y)] + y =$

$= 3y - [-9y + 6y - 4y] + y =$

$= 3y + 9y - 6y + 4y + y =$

$= 3y + 9y + 4y + y - 6y =$

$= 17y - 6y = 11y$

$a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x + 2y - 8x + y$

β) $4xy - 5y - 3x + 2y - x + 9xy$

γ) $-8\omega + 2 \cdot (3\omega - 4) - (3\omega + 5)$

δ) $-3y + 5\omega - 2 \cdot (-3y + 2) + 2 \cdot (\omega + 1)$

Λύση

α) $4x + 2y - 8x + y = 4x - 8x + 2y + y = -4x + 3y$

$$\begin{aligned} \text{β)} \quad 4xy - 5y - 3x + 2y - x + 9xy &= \\ &= 4xy + 9xy - 5y + 2y - 3x - x = \\ &= (4 + 9)xy + (-5 + 2)y + (-3 - 1)x = \\ &= 13xy + (-3)y + (-4)x = 13xy - 3y - 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{γ)} \quad -8\omega + 2 \cdot (3\omega - 4) - (3\omega + 5) &= \\ &= -8\omega + 6\omega - 8 - 3\omega - 5 = \\ &= -8\omega + 6\omega - 3\omega - 8 - 5 = \\ &= -5\omega - 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{δ)} \quad -3y + 5\omega - 2 \cdot (-3y + 2) + 2 \cdot (\omega + 1) &= \\ &= -3y + 5\omega + 6y - 4 + 2\omega + 2 = \\ &= 6y - 3y + 5\omega + 2\omega - 4 + 2 = 3y + 7\omega - 2 \end{aligned}$$

Προσθέτουμε (ή αφαιρούμε) μεταξύ τους μόνο τους όρους που περιέχουν τις ίδιες ακριβώς μεταβλητές, καθώς και τους «καθαρούς» αριθμούς με τους «καθαρούς» αριθμούς.

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

A = $3x - 2 \cdot (4x + 4) - 4$, όταν $x = -1,5$,

B = $2 \cdot (\omega + \theta) - 3\omega - (-2\theta + \omega - 1)$, όταν $\omega = -2$ και $\theta = 3$,

Γ = $(y + 3) + (x + 5) + 2 \cdot (x + y) - 3$, όταν $x + y = -2$.

Λύση

$A = 3x - 2 \cdot (4x + 4) - 4 = 3x - 8x - 8 - 4 = -5x - 12,$

άρα $A = -5 \cdot (-1,5) - 12 = 7,5 - 12 = -4,5.$

$B = 2 \cdot (\omega + \theta) - 3\omega - (-2\theta + \omega - 1)$

$B = 2\omega + 2\theta - 3\omega + 2\theta - \omega + 1$

$B = -2\omega + 4\theta + 1,$

άρα $B = -2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 + 1 = 4 + 12 + 1 = 17.$

Επίσης:

$\Gamma = (y + 3) + (x + 5) + 2 \cdot (x + y) - 3$

$\Gamma = y + 3 + x + 5 + 2x + 2y - 3$

- Κάνουμε πρώτα τις αναγωγές ομοίων όρων και στο τέλος αντικαθιστούμε την τιμή της μεταβλητής.
- Όταν τοποθετούμε στη θέση μιας μεταβλητής αρνητικό αριθμό, χρησιμοποιούμε πάντα παρένθεση.
- Δημιουργούμε το άθροισμα $x + y$ και δεν αντικαθιστούμε τιμές των x, y ώστε να έχουν άθροισμα -2 .

$$\Gamma = 3y + 3x + 5 = 3(x + y) + 5,$$

$$\text{άρα } \Gamma = 3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 = -1.$$

Ερωτήσεις κλειστού τύπου

Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1ης στήλης με τα δεδομένα της 2ης στήλης:

	1η στήλη	2η στήλη	
		0	A
1	$3x + 5x - 10x$	$4x$	B
2	$3x - 2x - 3y + 3x + 3y$	$4y$	Γ
3	$2 \cdot (-3x + 5 - x) + (x - 4)$	$-2x$	Δ
4	$2x + (x - y) - (3x - 5y)$	$-7x + 6$	E
5	$2x - 3y - 2x + 3y$	$2x$	ΣΤ
		$-4x$	Z

Ασκήσεις προς λύση

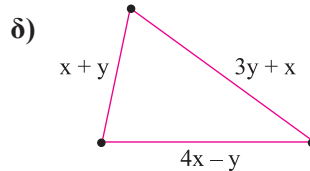
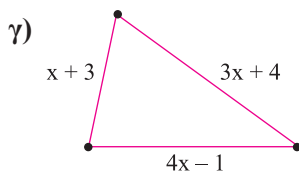
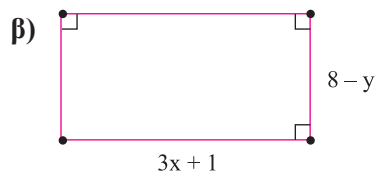
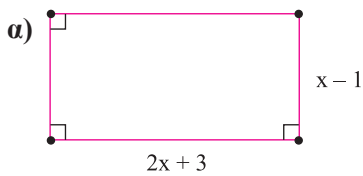
ΕΚΦΡΑΣΗ ΜΙΑΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ Ή ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:

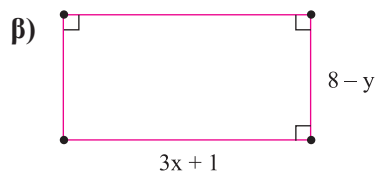
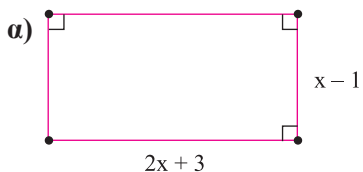
 - Ένας αριθμός αυξημένος κατά 2.
 - Ένας αριθμός μειωμένος κατά 3.
 - Το πενταπλάσιο ενός αριθμού.
 - Τα $\frac{5}{6}$ ενός αριθμού.
 - Το 20% ενός αριθμού.
- Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:

- α) Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξάνεται κατά 5.
 β) Το οκταπλάσιο ενός αριθμού μειώνεται κατά 1.
 γ) Το $\frac{1}{5}$ ενός αριθμού είναι μικρότερο από το 12.
 δ) Τα $\frac{2}{3}$ ενός αριθμού αυξάνονται κατά $\frac{1}{5}$.
 ε) Το 30% ενός αριθμού μειωμένο κατά 4.
- 3.** Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μεταβλητών:
 α) Το τριπλάσιο της διαφοράς δύο αριθμών αυξάνεται κατά 3.
 β) Το διπλάσιο του αθροίσματος δύο αριθμών μειώνεται κατά 5.
 γ) Το τετραπλάσιο του γινομένου δύο αριθμών αυξάνεται κατά το άθροισμά τους.
- 4.** Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:
 α) Το διπλάσιο του αθροίσματος ενός αριθμού με το 4 ελαττώνεται κατά 1.
 β) Το τριπλάσιο της διαφοράς ενός αριθμού με το 1 αυξάνεται κατά 4.
 γ) Το μισό του γινομένου ενός αριθμού με το 3 αυξάνεται κατά 5.
- 5.** Να εκφράσετε τις προτάσεις με τη βοήθεια μιας μεταβλητής:
 α) Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο από 3.
 β) Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι μεγαλύτερο κατά 3.
 γ) Το διπλάσιο ενός αριθμού είναι ίσο με 3.
- 6.** Να γράψετε με τη βοήθεια μεταβλητών τα ακόλουθα:
 α) Την περίμετρο ενός τετραγώνου πλευράς x .
 β) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου που έχει διαστάσεις x, y .
 γ) Την περίμετρο ενός τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές ΒΓ = α , ΓΑ = β και ΑΒ = γ .
 δ) Τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.
 ε) Έναν άρτιο φυσικό αριθμό.
 στ) Έναν περιττό φυσικό αριθμό.
- 7.** Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με αλγεβρική παράσταση τα ακόλουθα:
 α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 σοκολάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή της μίας σοκολάτας.

- β) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για την αγορά μιας αθλητικής φόρμας που πωλείται με έκπτωση 20%, αν γνωρίζουμε την αρχική της τιμή.
- γ) Το συνολικό ποσό για να στείλουμε 12 μηνύματα από το κινητό, αν γνωρίζουμε το κόστος του ενός μηνύματος.
- δ) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 6 εισιτήρια για το θέατρο, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός εισιτηρίου.
8. α) Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με αλγεβρική παράσταση τη φράση: «Σκέφτομαι έναν αριθμό. Τον τετραπλασιάζω και από αυτόν που προκύπτει αφαιρώ 12. Παίρνω το μισό του αποτελέσματος, σε αυτό προσθέτω 7 και αφαιρώ το διπλάσιο του αριθμού που σκέφτηκα».
- β) Να κάνετε τις πράξεις στην αλγεβρική παράσταση που προέκυψε. Είναι δυνατόν να ισχυριστεί κάποιος ότι το αποτέλεσμα είναι ο ίδιος πάντα αριθμός;
9. Να χρησιμοποιήσετε μια αλγεβρική παράσταση για να εκφράσετε την περίμετρο των σχημάτων:



10. Να χρησιμοποιήσετε μια αλγεβρική παράσταση για να εκφράσετε το εμβαδόν των σχημάτων:



ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

11. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7x + 5x$

β) $3y - 5y - 7y$

γ) $4x + 2x - 11x$

δ) $-4x + 3x - 8x$

ε) $2y + y - 5y + 3y$

στ) $3y + 5y - 14y + 4y$

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x + 4 - 2x - 1$

β) $-1 - 2y - 5y + 7$

γ) $4x + 2 - 7 - 9x$

δ) $9 - 3x + 6 - 2x - 1$

ε) $2y + y - 3 - 11y + 9$

στ) $11y + 7 - 9y - 5y + 4$

13. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4(\alpha + 2) + \alpha - 8(\alpha + 3)$

β) $4\omega - (2\omega + 3\omega - \omega) + 8\omega$

γ) $4 - 10t + 3 \cdot (-2t - 4) - (3t + 2)$

δ) $3(y - 2) - y - 4(y + 1) + 7$

14. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $5 \cdot (2x - 4 + x) - [2(x - 3) + x - 5]$

β) $14\omega - [-2 \cdot (2\omega + 3) - 2 + \omega] + 8$

γ) $2\theta - 2 \cdot (-3\theta + 1) + [-(-\theta + 5\theta - 4) + \theta]$

δ) $5 \cdot [3 \cdot (2 - x) - 2x + 3] - (7 - 11x)$

15. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7x + 4y - 6x - 7y$

β) $4x - 7y - 3y + 2x$

γ) $6x + 2y - 7x - 9y$

δ) $4x - 3x + 2y - 5y - y$

ε) $2y + 5y - 3x - 7x$

στ) $4y + 7x - 7y - 2y + 4x$

16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $-3x + 6x - (-3y + 2x) + 2 \cdot (x + y)$

β) $12x - 5t + 3 \cdot (-2t - 4 + x - 1) - (x + 2t - 4)$

γ) $-3,4x + 6,4x - (-3y + 2x) + 2 \cdot (x - 1,5y)$

17. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$A = 5x + 2 - (3x + 1) - 4 \cdot (-x - 2)$, όταν $x = -0,5$,

$B = -(3\alpha + 2) - \alpha - 2 \cdot (3\alpha + 1) + (12\alpha - 2)$, όταν $\alpha = -\frac{5}{2}$,

$\Gamma = 3 \cdot (2 - x) - (x + 4) + 2 \cdot (x + 1)$, όταν $x = -4$.

18. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 7 - 2(x + 1) - (7x - y) + 3(y - 2), \text{ όταν } x = -2, y = -3,$$

$$B = 9 + 2 \cdot (x - 2y) - 3 \cdot (4 - 2y + 5x), \text{ όταν } x = -1, y = 2,$$

$$\Gamma = 2 \cdot (4x - 1) - (7x - y + 2) + 3 \cdot (x + 1), \text{ όταν } x = 2, y = 4.$$

19. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2y - 4 + (3x + 1) + 2 \cdot (x + y) - x, \text{ όταν } x + y = 3,$$

$$B = 2 \cdot (y - 2x - 7) + 3 \cdot (3x + 1 + y), \text{ όταν } x + y = -2,$$

$$\Gamma = 5 \cdot (y + 1) - 2 \cdot (2x - 7) - (y + 2x - 5), \text{ όταν } 3x - 2y = 8.$$

20. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο η βάση είναι x cm και κάθεμία από τις ίσες πλευρές είναι 3 cm μεγαλύτερη από τη βάση.

α) Να εκφράσετε με αλγεβρική παράσταση την περίμετρο του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου, αν $x = 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΑΣΤΕΡΑΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

21. Αν $x + y = -5$ και $2\alpha - \beta = \frac{3}{5}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 2\alpha x - \beta x + 2\alpha y - \beta y$$

22. Αν $x + y = \frac{4}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2(x + 3) - 3(7 - 2y) + 4(x - 2) - 1}{3(x + z) - (3z - y) + 2y}$$

23. Αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι και οι x, y αντίθετοι, να υπολογίσετε την τιμή

$$\text{της παράστασης } A = \frac{\alpha(\beta x + \beta + 2) + \beta(\alpha y - 2) - 2(\alpha - \beta)}{\alpha\beta - x - y + 1}.$$

24. Αν $\alpha \neq \beta$ και $x - y = -8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha x - \alpha y - \beta x + \beta y + 2(\alpha - \beta)}{2(\beta - 1) - (2\alpha - 1) + 1}$$

1.2

Εξισώσεις α' βαθμού

Ιδιότητες πράξεων

1. Σε μια ισότητα μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, δηλαδή ισχύει: αν $a = b$, τότε $a + \gamma = b + \gamma$.
2. Σε μια ισότητα μπορούμε να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό, δηλαδή ισχύει: αν $a = b$, τότε $a - \gamma = b - \gamma$.
3. Σε μια ισότητα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο αριθμό, δηλαδή ισχύει: αν $a = b$, τότε $a \cdot \gamma = b \cdot \gamma$.
4. Σε μια ισότητα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό, δηλαδή ισχύει: αν $a = b$, τότε $\frac{a}{\gamma} = \frac{b}{\gamma}$, με $\gamma \neq 0$.

Ορισμοί

1. **Εξίσωση** ονομάζεται η ισότητα που περιέχει αριθμούς και μεταβλητές, μεταξύ των οποίων σημειώνονται οι γνωστές πράξεις.
2. **Εξίσωση πρώτου (α') βαθμού με έναν άγνωστο** ονομάζεται μια εξίσωση στην οποία η μέγιστη δύναμη που είναι υψωμένος ο άγνωστος είναι το 1.
3. Κάθε εξίσωση αποτελείται από **δύο μέλη** που χωρίζονται μεταξύ τους με το ίσον (=). Αριστερά από το ίσον βρίσκεται το **πρώτο μέλος** και δεξιά το **δεύτερο μέλος** της εξίσωσης.
4. Κάθε μέλος μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο αποτελείται από **γνωστούς** και **άγνωστους** όρους. Οι γνωστοί όροι περιέχουν μόνο αριθμούς, ενώ οι άγνωστοι όροι περιέχουν γινόμενα αριθμών με τη μεταβλητή.
5. **Συντελεστής του αγνώστου** ονομάζεται ο αριθμός που είναι πολλαπλασιασμένος με τη μεταβλητή σε κάθε άγνωστο όρο της εξίσωσης.
6. **Λύση ή ρίζα της εξίσωσης** ονομάζεται η τιμή της μεταβλητής που επαληθεύει την εξίσωση (δηλαδή ο αριθμός που, αν τοποθετηθεί στη θέση της μεταβλητής, κάνει τα δύο μέλη της εξίσωσης ίσα).
7. **Αόριστη (ή ταυτότητα)** ονομάζεται κάθε εξίσωση η οποία έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό.
8. **Αδύνατη** ονομάζεται κάθε εξίσωση η οποία δεν έχει λύση κανέναν αριθμό.

Παραδείγματα

- Η εξίσωση $3x - 5 = 7 - 9x$ είναι πρώτου βαθμού και έχει:

Πρώτο μέλος	Δεύτερο μέλος	Γνωστούς όρους	Άγνωστους όρους	Συντελεστής του αγνώστου
$3x - 5$	$7 - 9x$	$-5, 7$	$3x, -9x$	Ο όρος $3x$ έχει συντελεστή 3. Ο όρος $-9x$ έχει συντελεστή -9 .

- Η εξίσωση $3x - 5 = 7 - 9x$ έχει λύση $x = 1$, αφού $3 \cdot 1 - 5 = 7 - 9 \cdot 1$ ή $3 - 5 = 7 - 9$ ή $-2 = -2$, που ισχύει.
- Οι εξισώσεις $2x = 2x$, $0x = 0$ είναι αόριστες.
- Οι εξισώσεις $2x + 1 = 2x$, $0x = 5$ είναι αδύνατες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Σε μια εξίσωση οι γνωστοί και άγνωστοι όροι χωρίζονται μεταξύ τους με «+» ή «-» και ΟΧΙ με «·» ή «:».
2. Δεν επιτρέπεται η πρόσθεση ή η αφαίρεση μεταξύ γνωστού και άγνωστου όρου. Αυτό συμβαίνει διότι δε γίνονται τέτοιες πράξεις!!!
3. Οι παρενθέσεις που περιέχουν γνωστούς και άγνωστους όρους απαλείφονται μόνο με επιμεριστική ιδιότητα.
4. Οι πράξεις μεταξύ των άγνωστων όρων βασίζονται στην επιμεριστική ιδιότητα.
5. Σε μια εξίσωση μπορούμε να **μεταφέρουμε** γνωστούς και άγνωστους όρους από το ένα μέλος στο άλλο **αλλάζοντας το πρόσημό τους**.
6. Η πιο συνηθισμένη μορφή μιας αόριστης εξίσωσης είναι η $0x = 0$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x το 1ο μέλος της εξίσωσης ισούται με 0, όπως και το 2ο μέλος της. Άρα κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης.
7. Η πιο συνηθισμένη μορφή μιας αδύνατης εξίσωσης είναι η $0x = \beta$, $\beta \neq 0$. Παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x το 1ο μέλος της εξίσωσης ισούται με 0, ενώ το 2ο μέλος ισούται με $\beta \neq 0$. Μια τέτοια εξίσωση δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του x .

Παραδείγματα

- Η εξίσωση $2 + 3x = 5 - 8x$ έχει τέσσερις όρους, τους 2, 3x, 5, 8x.
- Η εξίσωση $\frac{2+x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{8x+1}{3}$ έχει τρεις όρους, τους $\frac{2+x}{3}$, $\frac{3x}{4}$, $\frac{8x+1}{3}$.
- Γενικά ισχύει ότι: $3x + 4 \neq 7x$ ή $3x + 4 \neq 7$.
- Γενικά ισχύει ότι: $5x - 2 \neq 3x$ ή $5x - 2 \neq 3$.
- $-2 \cdot (3x - 5 + y) = -6x + 10 - 2y$.
- $+(4x - 2) = 4x - 2$.
- $-(-3y + 5y - 2 + 5) = 3y - 5y + 2 - 5 = (3 - 5)y - 3 = -2y - 3$.
- $3x + 2x - 4x + 7x - 5x = (3 + 2 - 4 + 7 - 5) \cdot x = (12 - 9) \cdot x = 3x$,
ή: $3x + 2x - 4x + 7x - 5x = 12x - 9x = 3x$.
- Η εξίσωση $3x - 5 = 2x + 4$ γράφεται $3x - 2x = 4 + 5$.
- Η εξίσωση $7x + 5 - 3 = -2x + 4x$ γράφεται $7x + 2x - 4x = -5 + 3$.

Μορφές ασκήσεων – Λυμένες εφαρμογές

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ

- Βρίσκουμε το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) όλων των παρονομαστών της εξίσωσης (αν υπάρχουν παρονομαστές).
- Πολλαπλασιάζουμε **όλους τους όρους** της εξίσωσης με το ΕΚΠ. Για να αποφύγουμε λάθη, καλό είναι να βάζουμε παρένθεση σε κάθε αριθμητή.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (απλοποίηση κάθε παρονομαστή με το ΕΚΠ).
- Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων [χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα: $\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$].
- Χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους. Όποιος όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο.
- Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων (πράξεις). Οι πράξεις γίνονται ανάμεσα σε εκείνους τους όρους που περιέχουν ακριβώς την ίδια μεταβλητή.
- Αν ο συντελεστής του αγνώστου δεν είναι μηδέν, διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με τον συντελεστή του αγνώστου. Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι μηδέν, η εξίσωση είναι αόριστη (μορφή $0x = 0$) ή αδύνατη (μορφή $0x = \beta$, $\beta \neq 0$).

- 1. Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 2 και -2 είναι λύση της $7x - 2 = 3x + 6$.**

Λύση

- Ο αριθμός -2, για να είναι λύση της δοσμένης εξίσωσης, αρκεί να την επαληθεύει (δηλαδή, αν τοποθετηθεί στη θέση της μεταβλητής, να κάνει τα δύο μέλη της εξίσωσης ίσα). Αρκεί δηλαδή:

$$7 \cdot (-2) - 2 = 3 \cdot (-2) + 6$$

$$-14 - 2 = -6 + 6$$

$$-16 = 0, \text{ που δεν ισχύει}$$

Άρα ο αριθμός -2 δεν είναι λύση της εξίσωσης.

- Ο αριθμός 2, για να είναι λύση της δοσμένης εξίσωσης, αρκεί να την επαληθεύει. Αρκεί δηλαδή:

$$7 \cdot 2 - 2 = 3 \cdot 2 + 6$$

$$14 - 2 = 6 + 6$$

$$12 = 12, \text{ που ισχύει}$$

Άρα ο αριθμός 2 είναι λύση της εξίσωσης.

- 2. Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $-5x - 15 = 0$

β) $-8x + 5x - 2 = 7 - 2x - x - 9$

γ) $2 \cdot (2x - 2 + 5x) = 1 - (-2x + 5)$ **δ) $3 \cdot (x - 1) + 2 = 4x - (x + 5)$**

Λύση

α) $-5x - 15 = 0$

$$-5x = 0 + 15$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$-5x = 15$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{15}{-5}$$

[διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου]

$$x = -3$$

β) $-8x + 5x - 2 = 7 - 2x - x - 9$

$$-8x + 5x + 2x + x = 2 + 7 - 9$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$0x = 0, \text{ ταυτότητα}$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

γ) $2 \cdot (2x - 2 + 5x) = 1 - (-2x + 5)$

$$4x - 4 + 10x = 1 + 2x - 5$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$4x + 10x - 2x = 4 + 1 - 5$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$12x = 0$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

$$\frac{12x}{12} = \frac{0}{12}$$

[διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου]

$$x = 0$$

$$\delta) 3 \cdot (x - 1) + 2 = 4x - (x + 5)$$

$$3x - 3 + 2 = 4x - x - 5$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$3x - 4x + x = 3 - 2 - 5$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$0x = -4, \text{ αδύνατη}$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 4 + (-2x + 5,5 - 0,5) = 3 - (x - 0,4) + 2 \cdot (x + 1,3)$$

$$\beta) 3 - [-9y - (-3y + 2)] = 4y - (-2y + 1 + y) \cdot 2$$

Λύση

$$\alpha) 4 + (-2x + 5,5 - 0,5) = 3 - (x - 0,4) + 2 \cdot (x + 1,3)$$

$$4 - 2x + 5,5 - 0,5 = 3 - x + 0,4 + 2x + 2,6$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$-2x + x - 2x = -4 - 5,5 + 0,5 + 3 + 0,4 + 2,6$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$-3x = -3$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-3}{-3}$$

[διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου]

$$x = 1$$

$$\beta) 3 - [-9y - (-3y + 2)] = 4y - (-2y + 1 + y) \cdot 2$$

$$3 - [-9y + 3y - 2] = 4y - 2 \cdot (-2y + 1 + y)$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$3 + 9y - 3y + 2 = 4y + 4y - 2 - 2y$$

[απαλοιφή αγκυλών]

$$9y - 3y - 4y - 4y + 2y = -3 - 2 - 2$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$0y = -7, \text{ αδύνατη}$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{2} - \frac{5}{3} = x$$

$$\beta) \frac{2x}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{7}{6}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{x}{2} - \frac{5}{3} = x \quad [\text{ΕΚΠ}(2, 3) = 6]$$

$$6 \cdot \frac{x}{2} - 6 \cdot \frac{5}{3} = 6 \cdot x \quad [\text{πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ}]$$

$$3 \cdot x - 2 \cdot 5 = 6 \cdot x \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστών}]$$

$$3x - 10 = 6x$$

$$3x - 6x = 0 + 10 \quad [\text{χωρισμός γνωστών από αγνώστους}]$$

$$-3x = 10 \quad [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{10}{-3} \quad [\text{διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}]$$

$$x = -\frac{10}{3}$$

$$\beta) \frac{2x}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{7}{6}$$

$$\frac{(2x)}{3} + \frac{3}{4} = \frac{(5x)}{4} - \frac{7}{6} \quad [\text{ΕΚΠ}(3, 4, 6) = 12]$$

$$12 \cdot \frac{(2x)}{3} + 12 \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{(5x)}{4} - 12 \cdot \frac{7}{6} \quad [\text{πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ}]$$

$$4 \cdot (2x) + 3 \cdot 3 = 3 \cdot (5x) - 2 \cdot 7 \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστών}]$$

$$8x + 9 = 15x - 14$$

$$8x - 15x = -9 - 14 \quad [\text{χωρισμός γνωστών από αγνώστους}]$$

$$-7x = -23 \quad [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\frac{-7x}{-7} = \frac{-23}{-7} \quad [\text{διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}]$$

$$x = \frac{23}{7}$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{-6-x}{3} - 3 \cdot \frac{x+1}{5} = -2 - \frac{13x+9}{15}$$

$$\beta) \frac{-3x}{4} - 3 \cdot \frac{5-x}{2} = 2 \cdot (x-3) - \frac{1}{8} \cdot x + \frac{3 \cdot (3-5x)}{2}$$

Λύση

Όταν στον αριθμητή ενός κλάσματος υπάρχει πρόσθεση ή αφαίρεση, καλό είναι να βάζουμε παρένθεση.

$$\alpha) \frac{-6-x}{3} - 3 \cdot \frac{x+1}{5} = -2 - \frac{13x+9}{15}$$

$$\frac{(-6-x)}{3} - 3 \cdot \frac{(x+1)}{5} = -2 - \frac{(13x+9)}{15} \quad [\text{ΕΚΠ}(3, 5) = 15]$$

$$15 \cdot \frac{(-6-x)}{3} - 15 \cdot 3 \cdot \frac{(x+1)}{5} = -15 \cdot 2 - 15 \cdot \frac{(13x+9)}{15} \quad [\text{πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ}]$$

$$5 \cdot (-6-x) - 9 \cdot (x+1) = -30 - (13x+9) \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστών}]$$

$$-30 - 5x - 9x - 9 = -30 - 13x - 9 \quad [\text{απαλοιφή παρενθέσεων}]$$

$$-5x - 9x + 13x = 30 + 9 - 30 - 9 \quad [\text{χωρισμός γνωστών από αγνώστους}]$$

$$-1x = 0 \quad [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\frac{-1x}{-1} = \frac{0}{-1} \quad [\text{διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}]$$

$$x = 0$$

$$\beta) -\frac{-3x}{4} - 3 \cdot \frac{5-x}{2} = 2 \cdot (x-3) - \frac{1}{8} \cdot x + \frac{3 \cdot (3-5x)}{2}$$

$$-\frac{(-3x)}{4} - 3 \cdot \frac{(5-x)}{2} = 2 \cdot (x-3) - \frac{1}{8} \cdot x + \frac{3 \cdot (3-5x)}{2} \quad [\text{ΕΚΠ}(4, 2, 8) = 8]$$

$$-8 \cdot \frac{-3x}{4} - 8 \cdot 3 \cdot \frac{(5-x)}{2} = 8 \cdot 2 \cdot (x-3) - 8 \cdot \frac{1}{8} \cdot x + 8 \cdot \frac{3 \cdot (3-5x)}{2} \quad [\text{πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ}]$$

$$-2 \cdot (-3x) - 12 \cdot (5-x) = 16 \cdot (x-3) - x + 12 \cdot (3-5x) \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστών}]$$

$$6x - 60 + 12x = 16x - 48 - x + 36 - 60x \quad [\text{απαλοιφή παρενθέσεων}]$$

$$6x + 12x - 16x + x + 60x = 60 - 48 + 36 \quad [\text{χωρισμός γνωστών από αγνώστους}]$$

$$63x = 48 \quad [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\frac{63x}{63} = \frac{48}{63} \quad [\text{διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου}]$$

$$x = \frac{48}{63} = \frac{16}{21}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 4y - \frac{2}{3} \cdot \frac{3y}{5} - 2 \cdot \left(\frac{y}{2} - 3 \right) = -(3y - 2 + y)$$

$$\beta) 4 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{5} \right) - x = 2 \cdot \frac{x}{5} - \frac{x-1}{15}$$

Λύση

$$\alpha) 4y - \frac{2}{3} \cdot \frac{3y}{5} - 2 \cdot \left(\frac{y}{2} - 3 \right) = -(3y - 2 + y)$$

$$4y - \frac{6y}{15} - 2 \cdot \frac{y}{2} + 6 = -3y + 2 - y$$

$$4y - \frac{(6y)}{15} - y + 6 = -3y + 2 - y$$

[ΕΚΠ(1, 15) = 15]

$$15 \cdot 4y - 15 \cdot \frac{(6y)}{15} - 15 \cdot y + 15 \cdot 6 = -15 \cdot 3y + 15 \cdot 2 - 15 \cdot y \quad [\text{πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ}]$$

$$15 \cdot 4y - (6y) - 15 \cdot y + 15 \cdot 6 = -15 \cdot 3y + 15 \cdot 2 - 15 \cdot y \quad [\text{απαλοιφή παρονομαστών}]$$

$$60y - 6y - 15y + 90 = -45y + 30 - 15y \quad [\text{απαλοιφή παρενθέσεων}]$$

$$60y - 6y - 15y + 45y + 15y = -90 + 30 \quad [\text{χωρισμός γνωστών από αγνώστους}]$$

$$99y = -60 \quad [\text{αναγωγή ομοίων όρων}]$$

$$\frac{99y}{99} = \frac{-60}{99}$$

[διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου]

$$y = -\frac{60}{99} = -\frac{20}{33}$$

$$\beta) 4 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{5} \right) - x = 2 \cdot \frac{x}{5} - \frac{x-1}{15}$$

$$4 \cdot \left(\frac{5x}{15} + \frac{12}{15} \right) - x = 2 \cdot \frac{x}{5} - \frac{x-1}{15}$$

$$4 \cdot \left(\frac{5x+12}{15} \right) - x = \frac{2 \cdot x}{5} - \frac{x-1}{15}$$

$$4 \cdot \frac{(5x+12)}{15} - x = \frac{(2x)}{5} - \frac{(x-1)}{15}$$

[ΕΚΠ(5, 15) = 15]

$$15 \cdot 4 \cdot \frac{(5x+12)}{15} - 15 \cdot x = 15 \cdot \frac{(2x)}{5} - 15 \cdot \frac{(x-1)}{15}$$

[πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ]

$$4 \cdot (5x+12) - 15 \cdot x = 3 \cdot (2x) - (x-1)$$

[απαλοιφή παρονομαστών]

$$20x + 48 - 15x = 6x - x + 1$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$20x - 15x - 6x + x = -48 + 1$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$0x = -47, \text{ αδύνατη}$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{3x-7}{4} = \frac{1+2x}{3}$$

$$\beta) \frac{\frac{1+y}{3}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2+y}{6}$$

Λύση

α) 1ος τρόπος

$$\frac{3x-7}{4} = \frac{1+2x}{3}$$

$$\frac{(3x-7)}{4} = \frac{(1+2x)}{3}$$

[ΕΚΠ(3, 4) = 12]

$$12 \cdot \frac{(3x-7)}{4} = 12 \cdot \frac{(1+2x)}{3}$$

[πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ]

$$3 \cdot (3x-7) = 4 \cdot (1+2x)$$

[απαλοιφή παρονομαστών]

$$9x - 21 = 4 + 8x$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$9x - 8x = 4 + 21$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$x = 25$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

2ος τρόπος

Αφού έχουμε ισότητα κλασμάτων, μπορούμε να πάρουμε την ισότητα των χιαστί γινόμενων.

Έτσι έχουμε ότι:

$$\frac{3x-7}{4} = \frac{1+2x}{3}$$

$$3 \cdot (3x-7) = 4 \cdot (1+2x)$$

[χιαστί γινόμενο]

$$9x - 21 = 4 + 8x$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$9x - 8x = 4 + 21$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$x = 25$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

$$\text{Αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad (\beta\delta \neq 0), \text{ ισχύει}$$

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma.$$

$$\beta) \frac{1+y}{3} = \frac{2+y}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ($\beta\delta \neq 0$), ισχύει
 $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$.

$$6 \cdot \frac{(1+y)}{3} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (2+y)$$

[χιαστί γινόμενο]

$$6 \cdot \frac{(1+y)}{3} = \left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot (2+y)$$

$$6 \cdot \frac{(1+y)}{3} = \frac{3}{2} \cdot (2+y)$$

[ΕΚΠ(3, 2) = 6]

$$6 \cdot 6 \cdot \frac{(1+y)}{3} = 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot (2+y)$$

[πολλαπλασιασμός με το ΕΚΠ]

$$12 \cdot (1+y) = 9 \cdot (2+y)$$

[απαλοιφή παρονομαστών]

$$12 + 12y = 18 + 9y$$

[απαλοιφή παρενθέσεων]

$$12y - 9y = 18 - 12$$

[χωρισμός γνωστών από αγνώστους]

$$3y = 6$$

[αναγωγή ομοίων όρων]

$$\frac{3y}{3} = \frac{6}{3}$$

[διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου]

$$y = \frac{6}{3} = 2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ

8. Αν $A = 3x - 7$ και $B = -5x - (x - 1) \cdot 2$, για ποια τιμή του x είναι $A = B$;

Λύση

$$A = B$$

$$3x - 7 = -5x - 2 \cdot (x - 1)$$

$$3x - 7 = -5x - 2x + 2$$

$$3x + 5x + 2x = 7 + 2$$

$$10x = 9$$

$$x = \frac{9}{10}$$