





ΤΕΥΚΡΟΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

*Μιλώντας  
στην Άννα  
για τα μαθηματικά*

*Η Άννα δεν είναι υπαρκτό πρόσωπο.  
Είναι ένα κράμα από δεκάδες αγόρια και κορίτσια  
που γνώρισα όλα αυτά τα χρόνια  
και μου χάρισαν αυτό που εγώ θεωρώ  
την υπέρτατη δικαίωση: να διαβάσω τη χαρά  
της μαθηματικής ανακάλυψης  
μέσα στη λάμψη των ματιών τους.  
Σε όλα αυτά τα παιδιά αφιερώνω ετούτο το βιβλίο.  
Με αγάπη και ευγνωμοσύνη.*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Ναυτίλοι, ηλιοτρόπια και κουνέλια .....	11
2. Οι αριθμοί .....	31
3. Η κρίση της ασυμμετρίας .....	42
4. Κατασκευές με κανόνα και διαβήτη .....	54
5. Κωνικές τομές .....	64
6. Καρτεσιανές συντεταγμένες .....	81
7. Οι αρνητικοί αριθμοί .....	92
8. Μια βόλτα μέχρι το άπειρο .....	107
9. Η μέθοδος της εξάντλησης .....	126
10. Η μαθηματικοποίηση της φύσης .....	140
11. Πρώτοι αριθμοί και κρυπτογραφία .....	156
12. Γράμμα από το Παρίσι .....	166
Σημειώσεις .....	187
Ευρετήριο .....	195

## 1.

### ΝΑΥΤΙΛΟΙ, ΗΛΙΟΤΡΟΠΙΑ ΚΑΙ ΚΟΥΝΕΛΙΑ

Γνώρισα την Άννα όταν ήταν δέκα ετών. Ο Ιούνιος κόντευε να τελειώσει και είχαμε μόλις εγκατασταθεί στο εξοχικό μας για το καλοκαίρι. Επιθεωρούσα τα λιοτρόπια που είχα φυτέψει κατά μήκος της μεσοτοιχίας με το διπλανό οικόπεδο, όταν ανάμεσα στους ήλιους ξεπρόβαλε και το δικό της κεφαλάκι, καστανόξανθο, με μια μικρή, αυθάδικα ανασηκωμένη μύτη και γαλάζια διαπεραστικά ματάκια.

Με είχε ενημερώσει η γυναίκα μου ότι το σπίτι του κυρ Θόδωρου, ενός στριμμένου, υπέρβαρου κακόγερου που μας είχε αφήσει χρόνους, είχε πρόσφατα πουληθεί, δεν είχαμε όμως ακόμα γνωριστεί με τους καινούριους ιδιοκτήτες.

«Τι κάνεις εκεί πέρα;» με ρώτησε. Πάντα με ενθουσίαζε ο αυθόρμητος τρόπος των παιδιών που, αγνοώντας τις τυπικότητες και τις συστάσεις, πηγαίνουν κατευθείαν

στο ψητό. Σ' αυτό μοιάζουν με τους ανθρώπους του σιναφιού μου – δε θυμάμαι αν είπα πως είμαι μαθηματικός.

«Μετράω», της απάντησα στον ίδιο τόνο.

«Τι μετράς;»

«Έλα από 'δώ να δεις».

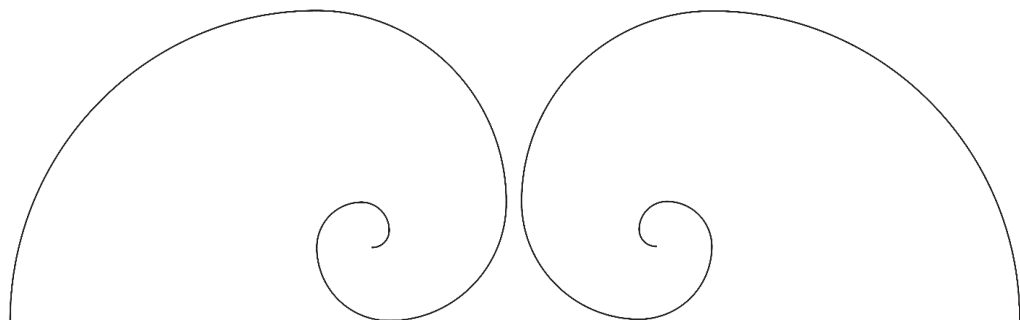
Το κεφαλάκι εξαφανίστηκε και σε λίγο ένα συμπαθέστατο σαμιαμίδι με περισπούδαστο ύφος και γόνατα γεμάτα γρατζουνιές χτυπούσε το κουδούνι της αυλόπορτας.

«Έλα», της είπα και την οδήγησα μπροστά στα λιотρόπια μου. «Βλέπεις αυτά τα λεπτά κοτσάνια που ξεκινούν από το κέντρο του λουλουδιού και προχωρούν σχηματίζοντας ελικοειδείς γραμμές προς την περιφέρεια; Είναι οι στήμονες».



Έσκυψε πάνω από το λουλούδι κι έμεινε αρκετή ώρα να το κοιτάζει.

«Είναι δυο ειδών γραμμές», μου είπε τελικά. «Άλλες στριφογυρνάνε προς τα αριστερά κι άλλες προς τα δεξιά».



«Σωστά! Κι εγώ προσπαθώ να μετρήσω πόσους στήμονες έχουν οι δεξιόστροφες έλικες και πόσους οι αριστερόστροφες».

Με κοίταξε απορημένη.

«Κανονικά η μια έλικα πρέπει να έχει 34 στήμονες και η άλλη 55», πρόσθεσα.

«Γιατί;»

«Δεν ξέρω. Έτσι τα κανόνισε η φύση!»

«Θέλω να πω, εσένα τι σε νοιάζει;»

«Είναι μεγάλη ιστορία. Θέλεις να την ακούσεις;»

Κοίταξε γύρω της. Βρήκε ένα χοντρό κούτσουρο που έμοιαζε λίγο με σκαμνάκι και κάθισε. «Ακούω», είπε με αέρα πριγκίπισσας που δίνει ακρόαση σε υπήκόό της.

«Υπάρχουν πολλοί τρόποι να βάλει κανείς αριθμούς στη σειρά. Ο πιο απλός είναι ο συνηθισμένος τρόπος που μετράμε: 1, 2, 3... Μπορείς όμως να προχωράς με μεγαλύτερα βήματα: 1, 3, 5, 7... ή 1, 6, 11, 16, 21...»

«Πρέπει να ξεκινάς πάντα από το 1;»



«Όχι, καθόλου. Μπορείς να ξεκινάς από όποιον αριθμό θέλεις: 8, 12, 16, 20...»

«Δηλαδή πρέπει να διαλέγεις με ποιον αριθμό αρχίζεις και ποιον αριθμό θα προσθέτεις για να βρεις τον επόμενο».

«Μπράβο! Όταν λοιπόν ορίζεις έναν κανόνα για να βάζεις αριθμούς στη σειρά, λέμε ότι δημιουργείς μια αριθμητική ακολουθία. Η ακολουθία την οποία δημιουργούμε επιλέγοντας έναν αρχικό αριθμό και μια σταθερή διαφορά, που την προσθέτουμε κάθε φορά για να βρούμε τον επόμενο αριθμό, λέγεται αριθμητική πρόοδος. Είναι μια από τις πιο απλές μορφές ακολουθίας».

«Υπάρχουν και πιο σύνθετες;»

«Βάλε τη φαντασία σου να δουλέψει. Χρειάζεσαι μια “αρχή” κι έναν “κανόνα παραγωγής”».

Με κοίταξε με τα φρύδια ζαρωμένα.

«3, 6, 12, 24...» της είπα.

Το πρόσωπό της φωτίστηκε:

«48, 96», συνέχισε.

«Δηλαδή;» την ενθάρρυνα.

«Αντί να προσθέτεις, πολλαπλασιάζεις».

«Ωραία. Αυτού του είδους η ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος».

«Προοδεύει όμως πολύ γρήγορα», μου είπε κοροϊδευτικά. «Μετά το 96 έρχεται το... 192, ύστερα το...», κόμπιασε αρκετά, «...384, ύστερα το... ουφ, παράτα με», κατέληξε.

«Δεν έχεις άδικο», την καθησύχασα. «Γι’ αυτό και, όταν θέλουμε να πούμε ότι μια ποσότητα αυξάνεται

υπερβολικά γρήγορα, λέμε ότι “αυξάνεται γεωμετρικά” ή “κατά γεωμετρική πρόοδο”. Εμείς όμως δεν έχουμε παρά να βρούμε τον κανόνα. Τις πράξεις τις κάνουν οι υπολογιστές. Η δική μας η δουλειά είναι να επινοήσουμε έξυπνους κι ενδιαφέροντες κανόνες.

»Να ένας άλλος κανόνας: διαλέγω τον πρώτο και τον δεύτερο αριθμό να είναι ίσοι με 1. Ύστερα, κάθε νέος αριθμός προκύπτει από την πρόσθεση των δύο προηγούμενων αθροισμάτων: 1, 1,  $1 + 1 = 2$ ,  $2 + 1 = 3$ ,  $3 + 2 = 5$ ,  $5 + 3 = 8$ . Μπορείς να συνεχίσεις;»

«Αμέ! 13, 21, 34, 55...». Σταμάτησε και με κοίταξε. «Α! Γι’ αυτό έλεγες ότι οι στήμονες στο λουλούδι σου είναι ή 34 ή 55;».

«Έτσι έχω διαβάσει. Στα μικρά λιοτρόπια η μια έλικα έχει 21 στήμονες κι η άλλη 34. Στα μεγαλύτερα 34 και 55 και στα ακόμα πιο μεγάλα 55 και 89».

«Α, μάλιστα,  $55 + 34 = 89$ ». Με κοίταξε δύσπιστα: «Και δε μου λες; Είναι αλήθεια;»

«Τι να σου πω; Το διάβασα σε τόσα βιβλία που στο τέλος το πίστεψα. Σήμερα το πρωί, πριν έρθεις, προσπαθούσα να βεβαιωθώ από μόνος μου. Όμως η ακολουθία Φιμπονάτσι υπάρχει παντού στη φύση, όχι μόνο στα λιοτρόπια».

«Φιμπονάτσι; Τι είν’ αυτό;»

«Ο Φιμπονάτσι ήταν ένας Ιταλός μαθηματικός που έζησε γύρω στο 1200 μ.Χ. Έγραψε ένα πολύ σημαντικό βιβλίο αριθμητικής, το *Liber Abaci*. Εκεί μέσα παρουσιάζει την ακολουθία που σου έδειξα και που φέρει σήμερα το όνομά του».

«Εντάξει. Λέω λοιπόν κι εγώ: αρχίζουμε με τρεις αριθμούς, το 1, το 2 και το 3. Κάθε νέος αριθμός θα δημιουργείται όταν προσθέσουμε τους τρεις προηγούμενους. 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37... Θα το πουν ακολουθία της Άννας;»

«Άννα σε λένε;»

«Ναι, Άννα. Λοιπόν; Τι θα γίνει με την ακολουθία μου;»

«Έχεις και δίκιο και άδικο. Φυσικά και μπορείς, όπως και ο καθένας μας, να φανταστείς έναν αυθαίρετο κανόνα παραγωγής μιας ακολουθίας και να του δώσεις το όνομά σου. Το θέμα είναι αν η ακολουθία που θα δημιουργήσεις παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον, είτε στα μαθηματικά είτε σε κάποια εφαρμογή που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά. Αλλιώς εσύ θα φτιάξεις την ακολουθία σου, αλλά κανένας δε θα ασχοληθεί μ' αυτήν».

«Κι ο Φιμπονάτσι έφτιαξε την ακολουθία του για να μελετήσει τα λιοτρόπια;»

«Όχι! Νομίζω μάλιστα πως ούτε το φαντάστηκε πως έχει εφαρμογή και στα λιοτρόπια. Στο παράδειγμα του βιβλίου του ο Φιμπονάτσι μιλάει για κουνέλια: Ας φανταστούμε ότι υπάρχει μια ιδιαίτερη ράτσα κουνελιών που ενηλικιώνονται τον δεύτερο μήνα της ζωής τους και όταν είναι ενήλικα γεννούν κάθε μήνα από ένα νέο ζευγάρι κουνελιών. Αν εγκαταστήσουμε μέσα σ' ένα μεγάλο αγρόκτημα ένα ανήλικο ζευγάρι κουνελιών και υποθέσουμε ότι τα κουνέλια αυτά δεν πεθαίνουν όσο κρατάει το πείραμα, πόσα ζευγάρια θα έχουμε στην αρχή του πρώτου μήνα, στην αρχή του δεύτερου μήνα, στην αρχή του δέκατου μήνα;»

Πήρε μια βαθιά ανάσα, πιο πολύ για θεατρικούς λόγους, και ξεκίνησε:

«Λοιπόν:

Στην αρχή του 1ου μήνα έχουμε μόνο 1 ανήλικο ζευγάρι.

Στην αρχή του 2ου μήνα έχουμε το ίδιο 1 ζευγάρι, που τώρα είναι ενήλικο και μέσα στον μήνα θα γεννήσει.

Στην αρχή του 3ου μήνα έχουμε 2 ζευγάρια: το ενήλικο και αυτό που γέννησαν.

Στην αρχή του 4ου μήνα έχουμε 3 ζευγάρια: το αρχικό, το ζευγάρι το οποίο γεννήθηκε τον προηγούμενο μήνα και που τώρα είναι ενήλικο και ένα νέο ανήλικο ζευγάρι.

Στην αρχή του 5ου μήνα έχουμε 5 ζευγάρια: τα δύο ενήλικα που γέννησαν από ένα ανήλικο ζευγάρι και το ανήλικο του προηγούμενου μήνα που ενηλικιώθηκε.

Στην αρχή του 6ου μήνα έχουμε 8 ζευγάρια: τα τρία ενήλικα που γέννησαν άλλα τρία και τα δύο ανήλικα του προηγούμενου μήνα που ενηλικιώθηκαν, και πάει λέγοντας».

Σταμάτησε κοιτάζοντάς με διερευνητικά.







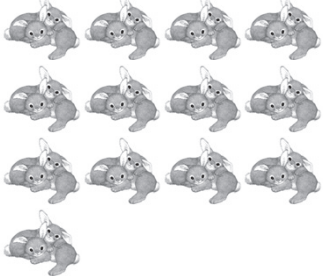
«Μπράβο!» της είπα. «Το έπιασες αμέσως το νόημα».

Χαμογέλασε με ικανοποίηση κι ύστερα σούφρωσε τη μύτη της:

«Μόνο που... νομίζω πως τέτοια “μαθηματικά” κουνέλια υπάρχουν μόνο στα παραμύθια».

«Δεν έχεις άδικο. Ο Φιμπονάτσι ήθελε απλώς να δώσει ένα παράδειγμα. Όμως την ακολουθία του τη βρί-

ΤΕΥΚΡΟΣ ΜΙΧΑΗΛΙΔΗΣ

Μήνας	Ενήλικα	Ανήλικα	Σύνολο	
1ος	0	1	1	
2ος	1	0	1	
3ος	1	1	2	
4ος	2	1	3	
5ος	3	2	5	
6ος	5	3	8	
7ος	8	5	13	

σκουμε συνέχεια μπροστά μας. Όχι μόνο στα λιοτρόπια. Τι ξέρεις για τις μέλισσες;»

«Ξέρω πως σε κάθε κυψέλη υπάρχει μια βασίλισσα, που γεννάει τ' αυγά. Υπάρχουν οι θηλυκές μέλισσες, οι εργάτριες, που κάνουν όλες τις δουλειές. Και υπάρχουν και οι κηφήνες, οι αρσενικές μέλισσες, που δεν κάνουν τίποτα!» συμπλήρωσε ρίχνοντάς μου μια άγρια ματιά.

Γέλασα. Πρώτη φορά έβλεπα φεμινίστρια δέκα ετών!

«Κάτι κάνουν κι οι κηφήνες», είπα. «Γονιμοποιούν τα αυγά που γεννά η βασίλισσα. Από τα γονιμοποιημένα αυγά βγαίνουν οι εργάτριες. Από όσα δε γονιμοποιηθούν βγαίνουν οι κηφήνες. Για σκέψου λοιπόν, πόσους προγόνους έχει ένας κηφήνας;»

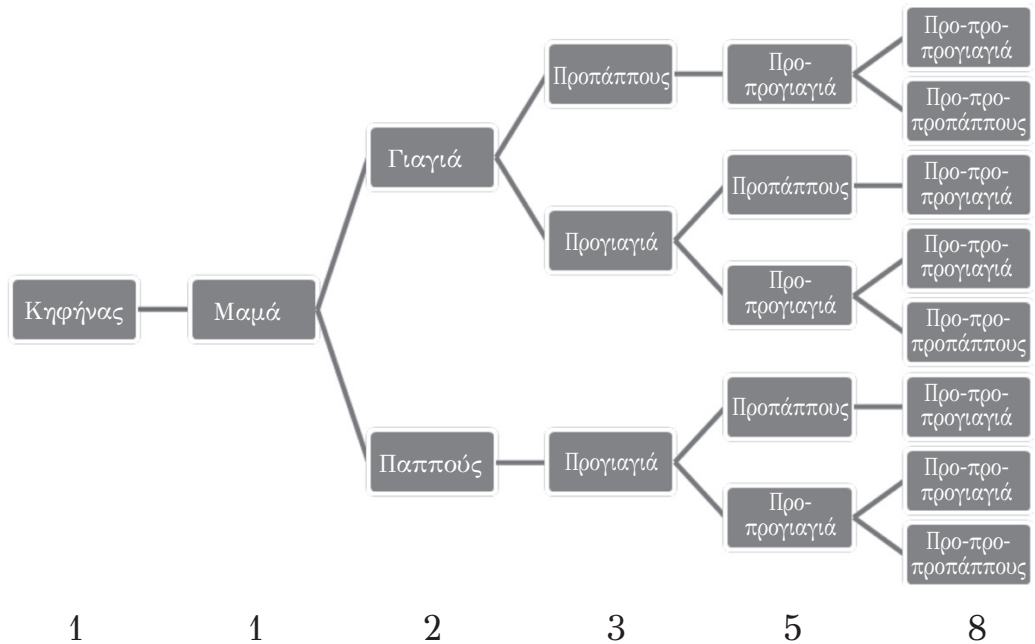
«Τι εννοείς;»

«Αφού ο κηφήνας βγαίνει από αυγό που δεν έχει γονιμοποιηθεί, δεν έχει μπαμπά, έχει μόνο μαμά».

«Ωραία».

«Τώρα οι παππούδες του... Έχει έναν παππού και μια γιαγιά από τη μαμά του. Σύνολο 2».

«Κατάλαβα! Ο παππούς του έχει μόνο μαμά. Η γιαγιά του έχει μπαμπά και μαμά. Σύνολο 3 προπαππούδες».



«Όπως βλέπεις, η ακολουθία Φιμπονάτσι είναι και πάλι εδώ! Δε μου λες... Τα σκαλοπάτια τ' ανεβαίνεις ένα ένα ή δυο δυο;»

«Μπορώ και ένα ένα, μπορώ και δυο δυο. Δοκίμασα μια φορά και τρία τρία αλλά δεν έφτανα».

«Ωραία! Ας πάρουμε μια σκάλα με τρία σκαλοπάτια. Με πόσους τρόπους μπορείς να την ανεβείς;»

Σκέφτηκε λίγο. «Ή ένα ένα τα σκαλοπάτια ή πρώτα δύο και μετά ένα ή πρώτα ένα και μετά δυο. Με τρεις τρόπους!»

«Κι αν είναι τέσσερα τα σκαλοπάτια;»

«1-1-1-1 ή 1-1-2 ή 1-2-1 ή 2-1-1 ή 2-2. Με πέντε τρόπους».

«Κι αν η σκάλα έχει 20 σκαλοπάτια;»

«Σιγά μην κάτσω να μετράω τους τρόπους».

«Δε σου ζητάω να μετρήσεις, σου ζητάω να σκεφτείς. Ας υποθέσουμε ότι έχεις βρει τους τρόπους για 3, 4, 5 μέχρι και 19 σκαλοπάτια. Μπορείς να βρεις εύκολα τους τρόπους για τα 20;»

Το πρόσωπό της φωτίστηκε. «Βέβαια! Δεν έχω παρά να πάρω όλους τους τρόπους για τα 19 σκαλοπάτια και να ανέβω το τελευταίο σκαλοπάτι που απομένει μόνο του».

«Μόνο;»

«Ή να πάρω όλους τους τρόπους για τα 18 σκαλοπάτια και να ανέβω τα δύο τελευταία σκαλοπάτια μαζί».

«Να τη πάλι η ακολουθία Φιμπονάτσι! Για να βρω κάθε καινούριο όρο, δεν έχω παρά να προσθέσω τους δύο προηγούμενους!».

«Πλάκα έχει».

«Άννα!» ακούστηκε η φωνή από δίπλα.

«Ωχ! Πρέπει να πάω να φάω». Ξίνισε τα μούτρα της.  
«Νομίζω πως έχουμε φακές».



Η Άννα ήρθε πάλι να με επισκεφθεί την επόμενη μέρα το απόγευμα. Κρατούσε στα χέρια της έναν πανέμορφο ναυτίλο, τον ίδιο που είχα δει πριν από λίγες μέρες στη βιτρίνα του τουριστικού καταστήματος.

«Κοίτα τι βρήκα στη θάλασσα!» μου είπε γεμάτη υπερηφάνεια.

«Μμμ!» της είπα γελώντας. «Και ήταν πολύ βαθιά εκεί που τον βρήκες;»

Κόμπιασε. «Α... αρκετά». Είδε το ειρωνικό βλέμμα στα μάτια μου και ομολόγησε. «Εντάξει! Μου το αγόρασε χτες η νονά μου. Αλλά μια μέρα θα βρω κι εγώ ένα τέτοιο όστρακο. Ξέρεις, βουτάω πολύ βαθιά».

«Για να βρεις τέτοιο πράγμα, Αννούλα, θα πρέπει να βουτήξεις πάααρα πολύ βαθιά», της είπα. «Και σε κάποια έρημη παραλία, όχι στη δικιά μας. Στη δικιά μας το πολύ πολύ να βρεις καμιά παντόφλα ή κανένα κουτάκι από αναψυκτικό. Βλέπω όμως ότι ο Φιμπονάτσι σε κυνηγάει», πρόσθεσα.

«Ο Φιμπονάτσι; Τι δουλειά έχει πάλι αυτός με τα όστρακα;»

«Έχεις χρόνο;»

«Έχω. Δε θα πάω στη θάλασσα το απόγευμα».

«Ωραία λοιπόν. Βολέψου στη βεράντα ώσπου να φέρω τον φορητό μου υπολογιστή».



