

Μαρία Ευσταθίου • Ελευθέριος Πρωτοπαπάς

Μαθηματικά

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Νέο πρόγραμμα



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΠΑΤΑΚΗ
www.patakis.gr

Συνοδεύεται από ένθετο
με τις λύσεις των ασκήσεων
του σχολικού βιβλίου

Το παρόν έργο πνευματικής ιδιοκτησίας προστατεύεται κατά τις διατάξεις της ελληνικής νομοθεσίας (Ν. 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει σήμερα) και τις διεθνείς συμβάσεις περί πνευματικής ιδιοκτησίας. Απαγορεύεται απολύτως η άνευ γραπτής αδείας του εκδότη κατά οποιοδήποτε τρόπο ή μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό ή άλλο) αντιγραφή, φωτοανατύπωση και εν γένει αναπαραγωγή, εκμίσθωση ή δανεισμός, μετάφραση, διασκευή, αναμετάδοση στο κοινό σε οποιαδήποτε μορφή και η εν γένει εκμετάλλευση του συνόλου ή μέρους του έργου.

Εκδόσεις Πατάκη – Βιβλία για την εκπαίδευση – Μαθηματικά Γυμνασίου
Μαρία Ευσταθίου και Ελευθέριος Πρωτοπαπάς, *Μαθηματικά, Β' Γυμνασίου*
Επιμέλεια: Ανδρέας Μπικουβαράκης
Υπεύθυνη έκδοσης: Υβόνη Καρύδη
Σχεδιασμός εξωφύλλου: Rinétta Κοσκινίδου
Διορθώσεις: Νάντια Κουτσουρούμπα
Σελιδοποίηση: Λεξήλεκτρον
Copyright© Σ. Πατάκης ΑΕΕΔΕ (Εκδόσεις Πατάκη),
Μαρία Ευσταθίου και Ελευθέριος Πρωτοπαπάς, 2006
Πρώτη έντυπη έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη (ΚΕΤ 5582, ISBN 978-960-16-2279-8)
Σχεδιασμός της παρούσας ψηφιακής έκδοσης: Νίκος Τσίτουρας
Πρώτη ψηφιακή έκδοση από τις Εκδόσεις Πατάκη, Αθήνα, Μάιος 2010
ΚΕΤ 6987
ISBN 978-960-16-3642-9



ΠΑΝΑΓΗ ΤΣΑΛΛΑΡΗ (ΠΡΩΗΝ ΠΕΙΡΑΙΩΣ) 38, 104 37 ΑΘΗΝΑ,
ΤΗΛ.: 210.36.50.000, 210.52.05.600, 801.100.2665 - FAX: 210.36.50.069
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 16, 106 78 ΑΘΗΝΑ, ΤΗΛ.: 210.38.31.078
ΥΠΟΚΑΤΑΣΤΗΜΑ: ΝΕΑ ΜΟΝΑΣΤΗΡΙΟΥ 122, 563 34 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ,
ΤΗΛ.: 2310.70.63.54, 2310.70.67.15 - FAX: 2310.70.63.55
Web site: <http://www.patakis.gr> • e-mail: info@patakis.gr, sales@patakis.gr



Περιεχόμενα

Οδηγός μελέτης	5
--------------------------	---

ΜΕΡΟΣ Α': ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εξισώσεις – Ανισώσεις

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις	11
1.2 Εξισώσεις α' βαθμού	17
1.3 Επίλυση τύπων	30
1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	35
1.5 Ανισώσεις α' βαθμού	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Πραγματικοί αριθμοί

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού	57
2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	67
2.3 Προβλήματα	75

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Συναρτήσεις

3.1 Η έννοια της συνάρτησης	81
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης	88
3.3 Η συνάρτηση $y = ax$	98
3.4 Η συνάρτηση $y = ax + \beta$	106
3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ – Η υπερβολή	118



Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Περιγραφική στατιστική

4.1	Βασικές έννοιες της στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα	125
4.2	Γραφικές παραστάσεις	131
4.3	Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων	144
4.4	Ομαδοποίηση παρατηρήσεων	156
4.5	Μέση τιμή – Διάμεσος	164

ΜΕΡΟΣ Β΄: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο: Εμβαδά επίπεδων σχημάτων – Πυθαγόρειο θεώρημα

1.1	Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας	179
1.2	Μονάδες μέτρησης επιφανειών	182
1.3	Εμβαδά επίπεδων σχημάτων	188
1.4	Πυθαγόρειο θεώρημα	200

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Τριγωνομετρία – Διανύσματα

2.1	Εφαπτομένη οξείας γωνίας	211
2.2	Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	219
2.3	Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης	226
2.4	Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°	234
2.5	Η έννοια του διανύσματος	242
2.6	Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων	250
2.7	Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες	258



Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Μέτρηση κύκλου

3.1	Εγγεγραμμένες γωνίες	263
3.2	Κανονικά πολύγωνα	271
3.3	Μήκος κύκλου	278
3.4	Μήκος τόξου	283
3.5	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	290
3.6	Εμβαδόν κυκλικού τομέα	294

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: Γεωμετρικά στερεά – Μέτρηση στερεών

4.1	Ευθείες και επίπεδα στο χώρο	301
4.2	Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου	309
4.3	Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου	318
4.4	Η πυραμίδα και τα στοιχεία της	326
4.5	Ο κώνος και τα στοιχεία του	335
4.6	Η σφαίρα και τα στοιχεία της	344
4.7	Γεωγραφικές συντεταγμένες	352

	Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείων γωνιών	354
--	---------------------------------------	-----

Οδηγός μελέτης

πώς πρέπει να διαβάσεις το βιβλίο αυτό

Φίλε μαθητή,

Το βιβλίο αυτό που κρατάς στα χέρια σου μπορεί να γίνει ένα πολύτιμο εργαλείο για τη γνώση, την κατανόηση και την εμπέδωση των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου.

Το διάβασμά σου πρέπει απαραίτητως να χωρίζεται σε τρία στάδια:

● ΘΕΩΡΙΑ

Η γνώση της θεωρίας είναι βασικό μέρος του διαβάσματος στα μαθηματικά. Μάθε, κατανόησε, εμπέδωσε τη θεωρία που υπάρχει στην αρχή κάθε ενότητας.

● ΜΟΡΦΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Όταν η θεωρία έχει γίνει πραγματικά κτήμα σου, μελέτησε και κατανόησε ποιες είναι οι διάφορες μορφές ασκήσεων που θα συναντήσεις. Σ' αυτό θα σε βοηθήσουν τα λυμένα παραδείγματα που αντιστοιχούν στις διάφορες κατηγορίες ασκήσεων. Λύσε σε ξαναλύσε τις λυμένες ασκήσεις, έτσι ώστε να έχει καταλάβει πλήρως πώς και γιατί γίνεται το καθετί. Μην προσπαθήσεις να αποστηθίσεις ασκήσεις!!! Τα μαθηματικά είναι σκέψη και λογική, όχι «παπαγαλία».

● ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εφόσον τα δύο προηγούμενα βήματα έχουν ολοκληρωθεί, λύσε τις ερωτήσεις νέου τύπου που υπάρχουν στο τέλος κάθε ενότητας. Στη συνέχεια λύσε τις άλυτες ασκήσεις χωρίς καμία βοήθεια. Προσπάθησε όσο το δυνατόν περισσότερο τα δύσκολα σημεία. Αν η λύση δεν προκύπτει, στο τέλος κάθε ενότητας υπάρχουν υποδείξεις – απαντήσεις για να βοηθηθείς ή να ελέγξεις τα αποτελέσματα που βρήκες.

Μη λησμονείς ότι τα βήματα αυτά είναι απαραίτητα, για να κατανοήσεις πλήρως τι διαπραγματεύεται η κάθε ενότητα.

Το βιβλίο περιλαμβάνει ένθετο με τις απαντήσεις των ερωτήσεων και τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου.

Οι συγγραφείς
Ευσταθίου Μαρία
Πρωτοπαπάς Ελευθέριος

Σχόλια και παρατηρήσεις για την περαιτέρω βελτίωση του βιβλίου
μπορείτε να αποστείλετε στην ηλεκτρονική διεύθυνση:
lprotopapas@hotmail.com ή στις Εκδόσεις Πατάκη.

3.4

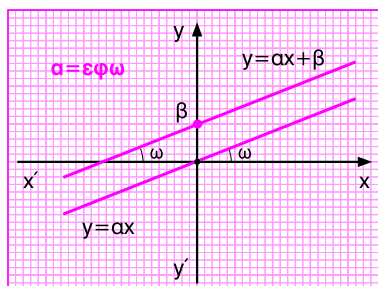
Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

Ιδιότητες της συνάρτησης

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ (με $\beta \neq 0$) είναι **ευθεία, παράλληλη** της $y = ax$ και **διέρχεται από το σημείο β του άξονα y/y'** .

Στα επόμενα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ θα λέγεται ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ ή απλά ευθεία $y = ax + \beta$.

- Στην εξίσωση $y = ax + \beta$, ο αριθμός a εκφράζει τη διεύθυνση της ευθείας και καλείται **κλίση της ευθείας $y = ax + \beta$** (όπως και στην ευθεία $y = ax$), ενώ το β δείχνει το σημείο στο οποίο τέμνει η ευθεία τον άξονα y/y' .



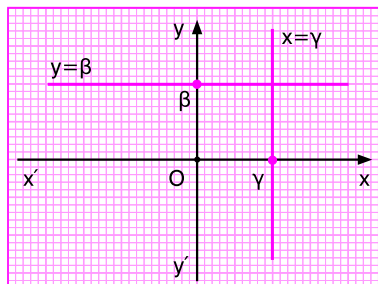
⚠ Παρατηρήσεις

- 1 Δύο ευθείες είναι **παράλληλες** αν έχουν την **ίδια** κλίση.

↪ Παράδειγμα

Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 2x + 1$, αφού και οι δύο είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 2x$, με κλίση $a = 2$.

- 2 Η εξίσωση $y = \beta$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα x'/x , που τέμνει τον y/y' στο $(0, \beta)$. Η εξίσωση $y = \beta$ είναι συνάρτηση.
- 3 Η εξίσωση $x = \gamma$ είναι ευθεία παράλληλη στον y/y' , που τέμνει τον x'/x στο $(\gamma, 0)$. Η εξίσωση $x = \gamma$ δεν είναι συνάρτηση, αφού σε μία τιμή του x αντιστοιχούν άπειρες τιμές του y .



Ορισμός

Κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ (με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$) παριστάνει ευθεία και καλείται **γραμμική εξίσωση**.

↪ Παραδείγματα

- Η εξίσωση $9x + 3y = -6$ γράφεται ισοδύναμα $3y = -9x - 6$ ή $y = -3x - 2$, οπότε παριστάνει ευθεία με κλίση $a = -3$.

- Η εξίσωση $0x + 2y = 8$ γράφεται ισοδύναμα $2y = 8$ ή $y = 4$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 4)$.
- Η εξίσωση $3x + 0y = -6$ γράφεται ισοδύναμα $3x = -6$ ή $x = -2$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$, που τέμνει τον $x'x$ στο $(-2, 0)$.
- Οι εξισώσεις $y = 0$ και $x = 0$ παριστάνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

Σημεία τομής της ευθείας $ax + by = \gamma$ (με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$) με τους άξονες

- Με βάση τα παραπάνω, ο άξονας $x'x$ έχει εξίσωση $y = 0$. Επομένως, για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής της ευθείας $ax + by = \gamma$ με τον άξονα $x'x$, αρκεί να θέσουμε $y = 0$ στην εξίσωση της ευθείας.
- Με βάση τα παραπάνω, ο άξονας $y'y$ έχει εξίσωση $x = 0$. Επομένως, για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής της ευθείας $ax + by = \gamma$ με τον άξονα $y'y$, αρκεί να θέσουμε $x = 0$ στην εξίσωση της ευθείας.

ΛΥΜΕΝΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διάβασες προσεκτικά τη θεωρία;



Α' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

- 1** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y = 2x$, $y = 2x + 1$ και $y = 2x - 1$, όπου x πραγματικός αριθμός.

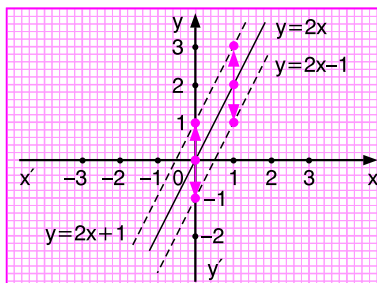
ΛΥΣΗ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x$ είναι ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα ακόμη σημείο της.
Για $x = 1$ είναι $y = 2 \cdot 1 = 2$.
Άρα η ευθεία $y = 2x$ διέρχεται από τα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 2)$, τα οποία ενώνουμε για να δημιουργήσουμε την ευθεία.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x + 1$ είναι ευθεία παράλληλη στην $y = 2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 1)$. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα ακόμη σημείο.
Για $x = 1$ είναι $y = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$.
Άρα η ευθεία $y = 2x + 1$ διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(1, 3)$, τα οποία ενώνουμε για να δημιουργήσουμε την ευθεία.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x - 1$ είναι ευθεία παράλληλη στην $y = 2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -1)$. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα ακόμη σημείο.
Για $x = 1$ είναι $y = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$.

Άρα η ευθεία $y = 2x - 1$ διέρχεται από τα σημεία $(0, -1)$ και $(1, 1)$, τα οποία ενώνουμε για να δημιουργήσουμε την ευθεία.

Παρατηρούμε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$, μετατοπισμένη κατά 1 «προς τα πάνω».

Αντίστοιχα, η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$, μετατοπισμένη κατά 1 «προς τα κάτω».



2 Δίνεται η εξίσωση $3 \cdot (2y - x) = 2x + y - 4$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί.

α) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όταν:

i) $0 \leq x \leq 2$, ii) x πραγματικός αριθμός.

ΛΥΣΗ

α) Για να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση του x , επιλύουμε το δοσμένο τύπο ως προς y (δηλαδή λύνουμε σαν να έχουμε εξίσωση με άγνωστο το y και όλα τα άλλα γνωστά).

Επομένως:

$$3 \cdot (2y - x) = 2x + y - 4$$

$$6y - 3x = 2x + y - 4$$

$$6y - y = 3x + 2x - 4$$

$$5y = 5x - 4$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{5x}{5} - \frac{4}{5}$$

$$y = x - \frac{4}{5}$$

Η συνάρτηση αυτή έχει γραφική παράσταση ευθεία με κλίση 1 και τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $(0, -\frac{4}{5})$.

β) Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών της ευθείας $y = x - \frac{4}{5}$ και στη συνέχεια παριστάνουμε τα ζεύγη τιμών (x, y) σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Τέλος, ενώνουμε τα σημεία που προκύπτουν.

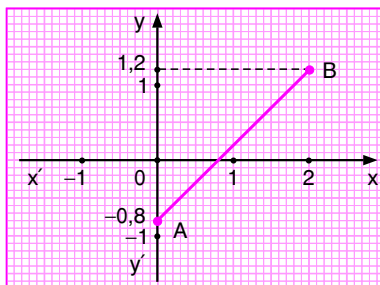
➤ Για $x = 0, y = 0 - \frac{4}{5} = -0,8$.

➤ Για $x = 2, y = 2 - \frac{4}{5} = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$.

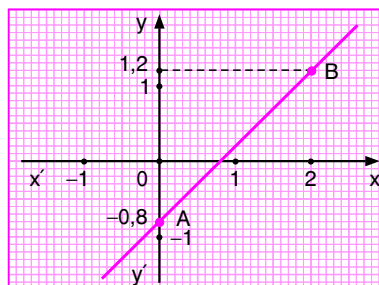
Έτσι, έχουμε τον πίνακα τιμών:

x	0	2
y	-0,8	1,2

i) Όταν $0 \leq x \leq 2$, θέλουμε το κομμάτι της ευθείας (ευθύγραμμο τμήμα) που έχει τετμημένες από 0 ως 2, δηλαδή από το σημείο $A(0, -0,8)$ μέχρι το $B(2, 1,2)$.



ii) Όταν το χ παίρνει κάθε πραγματική τιμή, έχουμε ολόκληρη την ευθεία.



Β' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

3 Δίνεται η ευθεία $2x - y = -3$. Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες x' και y' .

ΛΥΣΗ

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας $2x - y = -3$ με τον y' , θέτουμε στην εξίσωσή της όπου x το μηδέν και λύνουμε ως προς y .

Δηλαδή: $2 \cdot 0 - y = -3$ ή $-y = -3$, άρα $y = 3$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο τομής με τον y' είναι το $(0, 3)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της ευθείας $2x - y = -3$ με τον x' , θέτουμε στην εξίσωσή της όπου y το μηδέν και λύνουμε ως προς x .

Δηλαδή: $2 \cdot x - 0 = -3$ ή $2 \cdot x = -3$ ή $\frac{2x}{2} = \frac{-3}{2}$, άρα $x = -\frac{3}{2}$.

Επομένως το ζητούμενο σημείο τομής με τον άξονα x' είναι το $(-\frac{3}{2}, 0)$.

Γ' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΔΙΕΡΧΕΤΑΙ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΟ ΣΗΜΕΙΟ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ;

Μέθοδος

«Στον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστούμε όπου x την τετμημένη του δοσμένου σημείου και όπου y την τεταγμένη του δοσμένου σημείου. Αν προκύψει μια αληθής ισότητα, τότε η ευθεία **διέρχεται** από το σημείο, αν όχι, η ευθεία **δε διέρχεται** από το σημείο».

- 4** Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 3x - 2$ διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 3)$ και $B(1, 1)$.

ΛΥΣΗ

- Για το σημείο $A(-2, 3)$ αρκεί να ισχύει:
 $3 = 3 \cdot (-2) - 2$
 $3 = -6 - 2$
 $3 = -8$, που δεν είναι αληθές,
άρα η ευθεία δε διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.
- Για το σημείο $B(1, 1)$ αρκεί να ισχύει:
 $1 = 3 \cdot 1 - 2$
 $1 = 3 - 2$
 $1 = 1$, που είναι αληθές,
άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(1, 1)$.

- 5** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

α) Όταν η κλίση της είναι 2 και τέμνει τον y/y στο σημείο $(0, 5)$.

β) Όταν η κλίση είναι 4 και διέρχεται από το σημείο $(2, -2)$.

γ) Όταν διέρχεται από τα σημεία $(1, 2)$ και $(2, 3)$.

δ) Όταν διέρχεται από τα σημεία $(1, -2)$ και $(3, -2)$.

ε) Όταν διέρχεται από τα σημεία $(1, -2)$ και $(1, 3)$.

στ) Όταν σχηματίζει γωνία 45° με τον x/x και περνά από το σημείο $(-1, 2)$.

ΛΥΣΗ

Η γενική εξίσωση της ζητούμενης ευθείας θα είναι είτε της μορφής $ax + by = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$, είτε της μορφής $y = ax + \beta$.

α) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Αφού η κλίση της είναι 2, έχουμε $a = 2$ και η ευθεία γίνεται: $y = 2x + \beta$.

Επίσης, τέμνει τον y/y στο σημείο $(0, 5)$, άρα $\beta = 5$ και η ευθεία είναι η $y = 2x + 5$.

Στην ευθεία $y = ax + \beta$ έχουμε ότι:

➤ $a = \text{εφ}\omega = \text{κλίση της ευθείας}$

➤ $\beta = \text{τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με τον άξονα } y/y$.

β) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Αφού η κλίση της είναι 4, έχουμε $a = 4$ και η ευθεία γίνεται: $y = 4x + \beta$.

Επίσης, διέρχεται από το σημείο $(2, -2)$, άρα: $-2 = 4 \cdot 2 + \beta$ ή $\beta = -2 - 8 = -10$ και η ευθεία είναι η $y = 4x - 10$.

γ) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Αφού διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$, ισχύει: $2 = a \cdot 1 + \beta$ ή $a = 2 - \beta$ (I).

Επίσης, διέρχεται από το σημείο $(2, 3)$, άρα ισχύει: $3 = a \cdot 2 + \beta$, η οποία λόγω της (I) γίνεται: $3 = 2 \cdot (2 - \beta) + \beta$, άρα: $3 = 4 - 2\beta + \beta$ ή $2\beta - \beta = 4 - 3$ ή $\beta = 1$ και από την (I) βρίσκουμε: $a = 1$.

Επομένως η ευθεία είναι η $y = x + 1$.

δ) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Αφού διέρχεται από το σημείο $(1, -2)$, ισχύει:

$$-2 = a \cdot 1 + \beta \text{ ή } a = -2 - \beta \text{ (II)}$$

Επίσης, διέρχεται από το σημείο $(3, -2)$, άρα ισχύει: $-2 = a \cdot 3 + \beta$, η οποία λόγω της (II) γίνεται: $-2 = 3 \cdot (-2 - \beta) + \beta$, οπότε:

$$-2 = -6 - 3\beta + \beta \text{ ή } 3\beta - \beta = 2 - 6 \text{ ή } 2\beta = -4, \text{ άρα: } \beta = -2 \text{ και λόγω της (II) έχουμε: } a = -2 - (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Επομένως η ευθεία είναι η $y = -2$.

ε) Έστω $ax + \beta y = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, η εξίσωση της ευθείας.

Αφού διέρχεται από το σημείο $(1, -2)$, έχουμε ότι: $a \cdot 1 + \beta \cdot (-2) = \gamma$ ή $a - 2\beta = \gamma$ (III).

Αφού διέρχεται από το σημείο $(1, 3)$, έχουμε ότι: $a \cdot 1 + \beta \cdot 3 = \gamma$ ή $a + 3\beta = \gamma$, που λόγω της (III) γίνεται:

$$a + 3\beta = a - 2\beta \text{ ή } a - a = -2\beta - 3\beta \text{ ή } 5\beta = 0, \text{ άρα: } \beta = 0, \text{ οπότε λόγω της (III) βρίσκουμε } a = \gamma.$$

Συνεπώς η ευθεία γίνεται: $ax + 0y = a$ ή $ax = a$, άρα: $x = \frac{a}{a}$ ($a \neq 0$, αφού

$\beta = 0$) ή $x = 1$. Επομένως η ευθεία είναι η $x = 1$.

στ) Έστω $y = ax + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Αφού σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$ με τον x' , έχουμε:

$$a = \varepsilon_{\varphi\omega} = \varepsilon_{\varphi 45^\circ} = 1, \text{ άρα η ευθεία γίνεται: } y = x + \beta.$$

Επίσης, περνά από το σημείο $(-1, 2)$, άρα: $2 = -1 + \beta$ ή $\beta = 3$, δηλαδή η ευθεία είναι η $y = x + 3$.

6 Δίνεται η ευθεία $y = (2\lambda + 3) \cdot x - 7$. Να βρεθεί η τιμή του λ , ώστε η ευθεία να διέρχεται από το σημείο $(-5, 2)$.

ΛΥΣΗ

Εφόσον η ευθεία διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο, οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

«Στον τύπο της συνάρτησης αντικαθιστούμε όπου x την τετμημένη του δοσμένου σημείου και όπου y την τεταγμένη του δοσμένου σημείου. Επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς λ ».

Πιο συγκεκριμένα:

$$2 = (2\lambda + 3) \cdot (-5) - 7 \text{ ή } 2 = -10\lambda - 15 - 7 \text{ ή } 10\lambda = -2 - 15 - 7$$

$$\text{ή } 10\lambda = -24 \text{ ή } \frac{10\lambda}{10} = -\frac{24}{10}, \text{ άρα } \lambda = -2,4$$

Επομένως η τιμή του λ για την οποία η ευθεία διέρχεται από το σημείο $(-5, 2)$ είναι $-2,4$.

Αν δοκιμάσετε την ευθεία $y = ax + \beta$, δε θα βρείτε αποτέλεσμα, γι' αυτό και επιλέγουμε την πιο γενική μορφή ευθείας: $ax + \beta y = \gamma$, με $a \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

Δ' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΥΘΕΙΕΣ

- 7** Ένας ασφαλιστής έχει μηνιαίο μισθό 600 € και 20% επί της αξίας των ασφαλίσεων που πραγματοποιεί.
- α) Να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές y του ασφαλιστή ως συνάρτηση της αξίας x των ασφαλίσεων που πραγματοποιεί.
- β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.
- γ) Αν οι αποδοχές του το μήνα Μάρτιο ήταν 1.600 €, να βρείτε την αξία των ασφαλίσεων που πραγματοποίησε.

ΛΥΣΗ

- α) Αν θεωρήσουμε y τις μηνιαίες αποδοχές του ασφαλιστή και x την αξία των ασφαλίσεων που πραγματοποιεί, τότε η συνάρτηση που συνδέει τα x και y είναι η ακόλουθη:

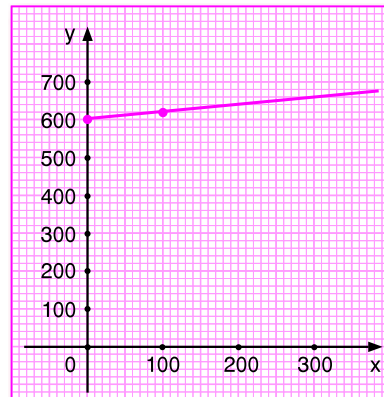
$$y = 600 + 20\% \cdot x, \text{ με } x \geq 0, \text{ ή } y = 600 + 0,2x, \text{ με } x \geq 0.$$

- β) Η παραπάνω συνάρτηση είναι ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο $(0, 600)$. Για να τη σχεδιάσουμε, αρκεί να προσδιορίσουμε ένα ακόμη σημείο της.

Για $x = 100$ είναι:

$$y = 600 + \frac{20}{100} \cdot 100 = 600 + 20 = 620.$$

Άρα η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0, 600)$ και $(100, 620)$. Παριστάνουμε τα σημεία αυτά σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, τα ενώνουμε και προεκτείνουμε δεξιά (αφού $x \geq 0$).



- γ) Εφόσον το μήνα Μάρτιο οι μηνιαίες αποδοχές του ασφαλιστή ήταν 1.600 €, θέτουμε στη συνάρτηση: $y = 600 + 0,2x$, όπου y το 1.600, και λύνουμε ως προς x .

$$1.600 = 600 + 0,2 \cdot x$$

$$\text{ή } -0,2 \cdot x = 600 - 1.600$$

$$\text{ή } -0,2 \cdot x = -1.000 \text{ ή } \frac{-0,2x}{-0,2} = \frac{-1.000}{-0,2}, \text{ άρα } x = 5.000 \text{ €}.$$

Επομένως η αξία των ασφαλίσεων που πραγματοποίησε ο ασφαλιστής ήταν 5.000 €.

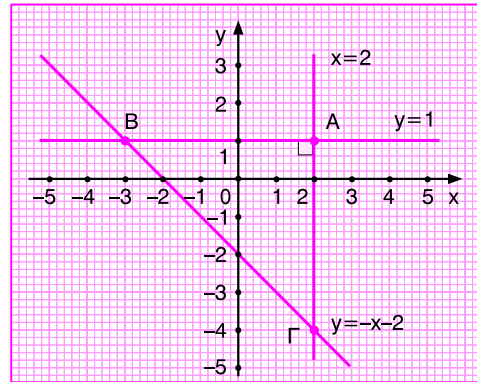
- > Η μονάδα μέτρησης και των δύο αξόνων είναι το 1 €.
- > Η ευθεία προεκτείνεται μόνο προς τις θετικές τιμές της μεταβλητής x , εφόσον $x \geq 0$.

- 8** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $x = 2$, $y = 1$, $y = -x - 2$, που δημιουργούν ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A , B , Γ και να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΛΥΣΗ

- Η ευθεία $x = 2$ διέρχεται από τα σημεία $(2, 0)$ και $(2, 1)$.
- Η ευθεία $y = 1$ διέρχεται από τα σημεία $(0, 1)$ και $(1, 1)$.
- Η ευθεία $y = -x - 2$ διέρχεται από τα σημεία $(-1, -1)$ και $(0, -2)$.

Ενώνουμε τα παραπάνω ζεύγη σημείων και προκύπτει το διπλανό σχήμα, από το οποίο βλέπουμε ότι: $A(2, 1)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(2, -4)$.



Επίσης, $AB = 5$ και $A\Gamma = 5$, άρα $E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12,5$.

Ε' ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Μέθοδος

- «Δύο ευθείες με τύπους $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν $a_1 = a_2$, ενώ η τιμή των σταθερών όρων β_1, β_2 δε μας ενδιαφέρει».
- «Για να βρούμε (αν υπάρχει) το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $ax + \beta y = \gamma$ ($\beta \neq 0$), απλά λύνουμε την εξίσωση ως προς y , οπότε ο συντελεστής του x είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας».

- 9** Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = 2x - 1$, $\epsilon_2: y = 3x - 1$, $\epsilon_3: 2y - 6x = 1$, $\epsilon_4: y - 3x = 1$. Χωρίς να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις τους, να εξετάσετε ποιες είναι μεταξύ τους παράλληλες.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε τις εξισώσεις των ϵ_3, ϵ_4 ως προς y και έχουμε:

$$\epsilon_3: 2y - 6x = 1 \text{ ή } 2y = 6x + 1 \text{ ή } y = \frac{6x}{2} + \frac{1}{2} \text{ ή } y = 3x + \frac{1}{2} \text{ και}$$

$$\epsilon_4: y - 3x = 1 \text{ ή } y = 3x + 1.$$

Επομένως η ευθεία $\epsilon_1: y = 2x - 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $a_1 = 2$, η ευθεία $\epsilon_2: y = 3x - 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $a_2 = 3$,

η ευθεία $\varepsilon_3: 2y - 6x = 1$ ή $y = 3x + \frac{1}{2}$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_3 = 3$ και
 η ευθεία $\varepsilon_4: y - 3x = 1$ ή $y = 3x + 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha_4 = 3$.
 Συνεπώς: $\varepsilon_2 // \varepsilon_3 // \varepsilon_4$.

10 Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1: y = (\lambda - 2) \cdot x - 1$. Να βρεθεί η τιμή του λ , ώστε η ευθεία ε_1 να είναι παράλληλη με την $\varepsilon_2: y = 4x + 2$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ε_1 να είναι ίσος με το συντελεστή της ε_2 , δηλαδή: $\lambda - 2 = 4$ ή $\lambda = 4 + 2$, οπότε $\lambda = 6$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λανθασμένες (Λ), δάζοντας στην αντίστοιχη θέση το σύμβολο ✓.

- | | Σ | Λ |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. Η ευθεία $y = -5x$ είναι παράλληλη με την $y = 5x + 6$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Η ευθεία $y = \frac{x}{2}$ είναι παράλληλη με την $y = 0,5x - 8$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Η ευθεία $y = -3x$ είναι παράλληλη με την $y = -3x + 4$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Η ευθεία $y = 8$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Η ευθεία $y = -5$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -5 . | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 και έχει κλίση 3 είναι: $y = 3x - 2$. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

ΑΛΥΤΕΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μελέτησες επαρκώς τις λυμένες;



Α' Ομάδα

- Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:
 - $y = 3x - 1$, **β**) $y = 5 - x$, **γ**) $y = -2x + 1$, **δ**) $y = 4x + 1,5$, **ε**) $y = \frac{2}{5}x + 1$.
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y + 2x = -2$, όταν:
 - ο x είναι πραγματικός αριθμός, **β**) $x \geq 0$, **γ**) $-2 \leq x \leq 2$.

3. Να βρεθεί σε ποια σημεία τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ οι ευθείες:
α) $2y + 3x = 2$, **β)** $y = 5x - 1$, **γ)** $y = \frac{2}{3}x - 3$.
4. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = 3x - 4$. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η ευθεία αυτή διέρχεται από το σημείο $A(-3, -13)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $y = -2x + 5$. Να βρεθεί ποια από τα σημεία $A(3, -1)$, $B(-3, 8)$, $\Gamma(5, -5)$ και $\Delta(4, 2)$ ανήκουν στη γραφική της παράσταση.
6. Δίνεται η εξίσωση $3x - 5y = -5$.
α) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x και να βρείτε την κλίση της ευθείας.
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες.
7. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
 $y = -4x$, $y = -4x + 2$ και $y = -4x - 3$, $y + 4x = 1$, $y + 4x - 3 = 0$.
 Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να αποδείξετε αυτή την παρατήρηση;
8. Ένα πλοίο, προκειμένου να καταπλεύσει στο λιμάνι του Πειραιά, χρησιμοποιεί βοηθητικά ένα ρυμουλκό. Η χρήση του ρυμουλκού χρεώνεται με ένα σταθερό ποσό 400 € και προσauξάνεται κατά 5 € το κάθε λεπτό που θα διαρκέσει η διαδικασία. Να βρεθεί η συνάρτηση που εκφράζει το κόστος y για να καταπλεύσει το πλοίο στο λιμάνι ως συνάρτηση του χρόνου x (σε λεπτά) που θα διαρκέσει ολόκληρη η διαδικασία.
9. Για να παρακολουθήσουμε μια συναυλία, πληρώνουμε 12 € για κάθε εισιτήριο και 1,5 € για κάθε αναψυκτικό. Να εκφράσετε το ποσό το οποίο θα πληρώσει κάποιος που θα παρακολουθήσει τη συναυλία ως συνάρτηση των x αναψυκτικών που θα αγοράσει. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που θα προκύψει.
10. Να φέρετε την εξίσωση $2y + 3x = 7$ στη μορφή $y = ax + \beta$ και να βρείτε την κλίση της ευθείας, καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες.
11. Χωρίς να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω ευθειών, να βρεθεί ποιες από αυτές είναι παράλληλες μεταξύ τους:
 $\epsilon_1: y = 8x - 3$, $\epsilon_2: y = -x - 6$, $\epsilon_3: y = 8x$, $\epsilon_4: y = -4x - 3$, $\epsilon_5: y = -x - 7$,
 $\epsilon_6: y = -4x - 2$, $\epsilon_7: y + 4x - 2 = 0$, $\epsilon_8: y + x - 2 = 0$.

Β' Ομάδα

12. Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 4x - 7$ και $y = (2\lambda + 1) \cdot x + 5$ είναι μεταξύ τους παράλληλες.

- 13.** Δίνεται η συνάρτηση $\psi = ax + \beta$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $K(-3, 1)$ και ισχύει $\beta = 2a$, να βρεθούν τα a, β .
- 14.** Δίνεται η ευθεία $y = ax + 3$.
- α)** Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(3, -3)$.
- β)** Να εξετάσετε αν η ευθεία του (α) ερωτήματος περνά από το $B(-1, 5)$.
- 15.** Να βρείτε για ποια τιμή του μ η ευθεία $y = (3\mu - 2) \cdot x + 2$ διέρχεται από το σημείο $K(3, -4)$.
- 16.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες $x = -1, y = 2, y = 3x - 1$, που δημιουργούν ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ , καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 17.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:
- α)** Όταν η κλίση της είναι 3 και τέμνει τον y' στο σημείο $(0, -4)$.
- β)** Όταν η κλίση είναι -2 και διέρχεται από το σημείο $(3, -5)$.
- γ)** Όταν διέρχεται από τα σημεία $(3, -2)$ και $(2, -3)$.
- δ)** Όταν διέρχεται από τα σημεία $(2, -1)$ και $(2, -2)$.
- ε)** Όταν διέρχεται από τα σημεία $(5, -1)$ και $(-7, -1)$.
- στ)** Όταν σχηματίζει γωνία 30° με τον x' και περνά από το σημείο $(1, -1)$.

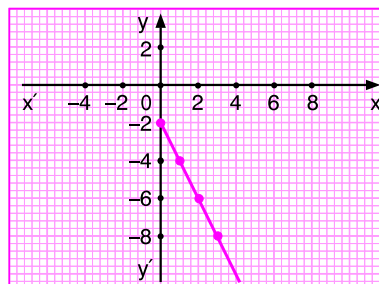
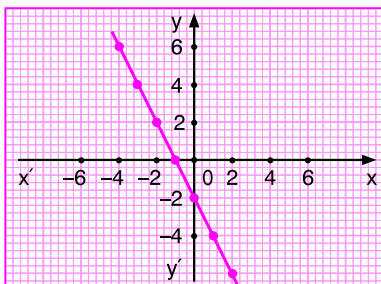


ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

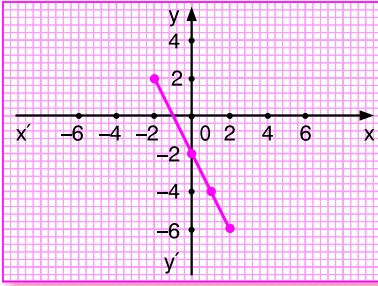
Απαντήσεις σωστού-λάθους: 1. Λ, 2. Σ, 3. Σ, 4. Λ, 5. Σ, 6. Σ.

2. **α)** x πραγματικός.

β) $x \geq 0$.



γ) $-2 \leq x \leq 2$.



3. **α)** $x'x: \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ και $y'y: (0, 1)$, **θ)** $x'x: \left(\frac{1}{5}, 0\right)$ και $y'y: (0, -1)$, **γ)** $x'x: \left(\frac{9}{2}, 0\right)$ και $y'y: (0, -3)$.
4. Η ευθεία διέρχεται από το $A(-3, -13)$.
5. Μόνο τα σημεία A και Γ ανήκουν στην ευθεία $y = -2x + 5$.
6. **α)** $y = \frac{3}{5}x + 1$, $a = \frac{3}{5}$, **θ)** $x'x: \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ και $y'y: (0, 1)$.
7. Είναι παράλληλες, αφού έχουν την ίδια κλίση.
8. $y = 400 + 5 \cdot x$, με $x \geq 0$.
9. $y = 12 + 1,5 \cdot x$, με $x \geq 0$.
10. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, $a = -\frac{3}{2}$, $x'x: \left(\frac{7}{3}, 0\right)$, $y'y: \left(0, \frac{7}{2}\right)$.
11. $\varepsilon_1 // \varepsilon_3$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon_5 // \varepsilon_8$ και $\varepsilon_4 // \varepsilon_6 // \varepsilon_7$.
12. $\lambda = \frac{3}{2}$.
13. $a = -1$ και $\beta = -2$.
14. **α)** $y = -2x + 3$, **θ)** διέρχεται από το σημείο $B(-1, 5)$.
15. $\mu = 0$.
16. $A(-1, 2)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(-1, -4)$ και $E_{AB\Gamma} = 6$.
17. **α)** $y = 3x - 4$, **θ)** $y = -2x + 1$, **γ)** $y = x - 5$, **δ)** $x = 2$, **ε)** $y = -1$, **στ)** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.