# 9 Εξισώσεις 1ου βαθμού

Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$

- $\xrightarrow{(\text{με } \alpha \neq 0)}$ έχει ακριβώς μία λύση, τη $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- $\xrightarrow{(\text{με } \alpha = \beta = 0)}$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x **(ταυτότητα ή αόριστη)**.
- $\xrightarrow{(\text{με } \alpha = 0 \text{ και } \beta \neq 0)}$ δεν έχει καμία πραγματική λύση **(αδύνατη)**.

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

*Αν έχουμε την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, τότε:*

**1.** Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$, η εξίσωση γράφεται $\alpha x = 0$, που έχει μοναδική λύση το $x = 0$.

**2.** Όταν μια εξίσωση έχει ή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha \cdot \beta = 0$, χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0}$$

**3.** Όταν μια εξίσωση έχει ή μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha + \beta = 0$ ($\alpha, \beta \geq 0$), χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha, \beta \geq 0, \text{ τότε } \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0}$$

Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι ότι:

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0}$$

## ΟΡΙΣΜΟΙ

**1.** Δύο εξισώσεις λέγονται **ισοδύναμες** αν έχουν την ίδια λύση (ή λύσεις).

**2.** Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$, όπου τα α, β δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, αλλά εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων, λέγεται **παραμετρική εξίσωση** και τα γράμματα αυτά **παράμετροι**. Η εργασία που κάνουμε για την εύρεση των ριζών λέγεται **διερεύνηση**.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η εξίσωση $(\lambda + 2) \cdot x = 3\lambda$ είναι παραμετρική, με παράμετρο το λ.

# Μέθοδοι και εφαρμογές

## 1η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:***

**α)** Βρίσκουμε το ΕΚΠ (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) των παρονομαστών (αν υπάρχουν).

**β)** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ.

**γ)** Κάνουμε πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή ομοίων όρων) και φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$.

**δ)** Ακολουθούμε τα βήματα που αναλύθηκαν στη θεωρία για την επίλυση της εξίσωσης.

**1.** **Να λύσετε τις εξισώσεις: α)** $\mathbf{2(x-1)+3x-2=3-2(4+x)}$,

**β)** $\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{4-5x}{2}=\dfrac{4x+11}{3}$,

**γ)** $(x+1)^2+(2x-1)(2x+3)=5x^2-x$,

**δ)** $2{,}5(x-2)-(2{,}5x-1)-2(2x+3)=4(x-0{,}25)$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $2(x-1)+3x-2=3-2(4+x) \Leftrightarrow 2x-2+3x-2=3-8-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+3x+2x=2+2+3-8 \Leftrightarrow 7x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{7}$.

**β)** $\dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{4-5x}{2}=\dfrac{4x+11}{3} \Leftrightarrow 12\cdot\dfrac{2x-3}{4}-12\cdot\dfrac{4-5x}{2}=12\cdot\dfrac{4x+11}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot(2x-3)-6\cdot(4-5x)=4\cdot(4x+11) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-9-24+30x=16x+44 \Leftrightarrow 6x+30x-16x=44+9+24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 20x=77 \Leftrightarrow x=\dfrac{77}{20}$.

**γ)** $(x+1)^2+(2x-1)(2x+3)=5x^2-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+4x^2+6x-2x-3=5x^2-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x^2+x^2+4x^2+6x+x+1-3=0 \Leftrightarrow 7x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{7}$.

**δ)** $2{,}5(x-2)-(2{,}5x-1)-2(2x+3)=4(x-0{,}25) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}5x-5-2{,}5x+1-4x-6=4x-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}5x-2{,}5x-4x-4x=5-1+6-1 \Leftrightarrow -8x=9 \Leftrightarrow x=-\dfrac{9}{8}$.

## 2η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:***

**α)** Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.
**β)** Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.
**γ)** Βάζουμε περιορισμούς για τους παρονομαστές (ή ΕΚΠ $\neq 0$).
**δ)** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το ΕΚΠ.
**ε)** Κάνουμε πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα, αναγωγή ομοίων όρων) και φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $αx + β = 0 \Leftrightarrow αx = -β$.
**στ)** Λύνουμε την εξίσωση κατά τα γνωστά.
**ζ)** Τέλος, ελέγχουμε αν οι ρίζες που βρήκαμε είναι δεκτές ή απορρίπτονται με βάση τους αρχικούς περιορισμούς.

**2. Να λύσετε τις εξισώσεις:**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**α)** $\dfrac{2x-3}{x-2}=\dfrac{3}{4}$, **β)** $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{7}{1-x^2}$, **γ)** $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}=\dfrac{3}{x}$.

**Λύση**

**α)** ΕΚΠ $= 4\cdot(x-2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, οπότε:

$$\frac{2x-3}{x-2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(x-2)\cdot\frac{2x-3}{x-2}=4(x-2)\cdot\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\cdot(2x-3)=3\cdot(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x-12=3x-6 \Leftrightarrow 8x-3x=12-6 \Leftrightarrow 5x=6 \Leftrightarrow x=\frac{6}{5}, \text{ που είναι δεκτή.}$$

**β)** $$\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{7}{1-x^2} \Leftrightarrow \frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{7}{(1-x)(1+x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{-7}{(x-1)(x+1)} \quad \textbf{(I)}.$$

ΕΚΠ $=(x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$, οπότε:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\frac{5}{x-1}+(x-1)(x+1)\frac{3}{x+1}=-(x-1)(x+1)\frac{7}{(x-1)(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)+3(x-1)=-7 \Leftrightarrow 5x+5+3x-3=-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+3x=3-5-7 \Leftrightarrow 8x=-9 \Leftrightarrow x=-\frac{9}{8}, \text{ που είναι δεκτή.}$$

**γ)** Πρέπει $\left(x-1\neq 0 \text{ και } 1+\dfrac{1}{x-1}\neq 0 \text{ και } x\neq 0\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x\neq 1 \text{ και } \frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\neq 0 \text{ και } x\neq 0\right) \Leftrightarrow \left(x\neq 1 \text{ και } \frac{x}{x-1}\neq 0 \text{ και } x\neq 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq 0).$$

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{x-1}}=\frac{3}{x} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{3}{x} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1+\frac{x-1}{x}=\frac{3}{x}$ **(ΙΙ)**, όπου ΕΚΠ = x, άρα (ΙΙ) $\Leftrightarrow x\cdot 1+x\cdot\frac{x-1}{x}=x\cdot\frac{3}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 1 + 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, που είναι δεκτή.

**3. Να λύσετε τις εξισώσεις:**

**α)** $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4}$, **β)** $1+\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}$, **γ)** $\frac{2x}{3x-6}-\frac{x}{2x-4}=1+\frac{5x-12}{12-6x}$.

**Λύση**

**α)** $\frac{1}{x+2}=\frac{x}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2}=\frac{x}{(x-2)(x+2)}$ **(Ι)**.

ΕΚΠ $=(x + 2)\cdot(x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, οπότε:

(Ι) $\Leftrightarrow (x-2)(x+2)\frac{1}{x+2}=(x-2)(x+2)\frac{x}{(x-2)(x+2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2 = x \Leftrightarrow x - x = 2 \Leftrightarrow 0x = 2$, που είναι αδύνατη.

**Η εξίσωση $0x = \beta \neq 0$ είναι αδύνατη.**

**β)** ΕΚΠ $= x \neq 0$, οπότε:

$1+\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x\cdot 1+x\cdot\frac{x+1}{x}=x\cdot\frac{1}{x} \Leftrightarrow x + x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 1 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, η οποία απορρίπτεται με βάση τον περιορισμό, επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

**γ)** $\frac{2x}{3x-6}-\frac{x}{2x-4}=1+\frac{5x-12}{12-6x} \Leftrightarrow \frac{2x}{3(x-2)}-\frac{x}{2(x-2)}=1-\frac{5x-12}{6(x-2)}$ **(ΙΙ)**.

Πρέπει $x \neq 2$ και έχουμε ΕΚΠ $= 6\cdot(x - 2)$, οπότε:

$(ΙΙ)\Leftrightarrow 6(x-2)\cdot\frac{2x}{3(x-2)}-6(x-2)\cdot\frac{x}{2(x-2)}=6(x-2)\cdot 1-6(x-2)\cdot\frac{5x-12}{6(x-2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot 2x - 3x = 6(x - 2) - (5x - 12) \Leftrightarrow 4x - 3x = 6x - 12 - 5x + 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 3x - 6x + 5x = -12 + 12 \Leftrightarrow 0x = 0$,

που είναι ταυτότητα.

Επομένως, με βάση τον αρχικό περιορισμό η εξίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq 2$.

**Η εξίσωση $0x = 0$ είναι ταυτότητα.**

**4. Να λύσετε την εξίσωση** $\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{x^2+18x+81}{x+9}$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** Για $x \neq 3$ και $x \neq -9$ έχουμε:

$$\frac{x^3-27}{x-3}=\frac{x^2+18x+81}{x+9} \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\frac{(x+9)^2}{x+9} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 9 = x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -2$, που είναι δεκτές.

## 3η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Εξισώσεις ανώτερου βαθμού που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:***

**α)** Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.

**β)** Παραγοντοποιούμε.

**γ)** Χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Χρήσιμη είναι και η ισοδυναμία $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$ ή $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

**5.** **Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^2(x-5) - 2x(x-5) + (x-5) = 0$, β) $(x+1)^2 - (-x-1)(x+5) = 0$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $x^2(x-5) - 2x(x-5) + (x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ή $(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ή $x - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 5$ ή $x = 1$.

**β)** $(x+1)^2 - (-x-1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+1+x+5) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(2x+6) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ ή $2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $2x = -6 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = -3$.

**6.** **Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$,**
**β) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = 39$,**
**γ) $(x^2-4)\cdot(x+1) = (x^2-1)(x-2)$,**
**δ) $x^3 + 5x^2 - 15x - 27 = x^2 - 9$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-4) - 4(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

**β)** $(x+1)^2 - (x-2)^2 = 39 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4) = 39 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 - 39 = 0 \Leftrightarrow 6x - 42 = 0 \Leftrightarrow 6x = 42 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{42}{6} \Leftrightarrow x = 7$.

**γ)** $(x^2-4)\cdot(x+1) = (x^2-1)(x-2) \Leftrightarrow (x^2-4)\cdot(x+1) - (x^2-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+2)\cdot(x+1) - (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\cdot(x+2-x+1) = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ ή $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

**δ)** $x^3 + 5x^2 - 15x - 27 = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^3 - 27 + 5x^2 - 15x - (x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9) + 5x(x-3) - (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-3)\cdot(x^2 + 3x + 9 + 5x - x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x^2 + 7x + 6) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ή $x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $(x+1)(x+6) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$ ή $x = -6$.

**7. Να λύσετε την εξίσωση $(x-3)^3+(2x-5)^3+(8-3x)^3=0$.**

**Λύση**

Αφού $(x-3)+(2x-5)+(8-3x)=0$, από την ταυτότητα του Euler έχουμε ότι:
$(x-3)^3+(2x-5)^3+(8-3x)^3=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(2x-5)\cdot(8-3x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-3=0$ ή $2x-5=0$ ή $8-3x=0 \Leftrightarrow x=3$ ή $2x=5$ ή $3x=8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=3$ ή $x=\frac{5}{2}$ ή $x=\frac{8}{3}$.

## 4η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Εξισώσεις με απόλυτα που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:*** Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες: $|f(x)|=\theta \Leftrightarrow f(x)=\pm\theta$, $|f(x)|=\kappa\cdot|g(x)| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)=\pm\kappa\cdot g(x)$ και $|f(x)|=h(x) \Leftrightarrow f(x)=\pm h(x)$, όπου $\kappa,\ \theta,\ h(x)\geq 0$.

**8. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $|3x-2|=5$, β) $|2-5x|=|3x+1|$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $|3x-2|=5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x-2=5$ ή $3x-2=-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x=7$ ή $3x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$ ή $x=-1$.

**$|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=\pm\theta$, όπου $\theta\geq 0$**

**$|f(x)|=\kappa\cdot|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=\pm\kappa\cdot g(x)$, όπου $\kappa\geq 0$**

**β)** $|2-5x|=|3x+1| \Leftrightarrow 2-5x=\pm(3x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2-5x=3x+1$ ή $2-5x=-3x-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -5x-3x=1-2$ ή $-5x+3x=-1-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -8x=-1$ ή $-2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$ ή $x=\frac{3}{2}$.

**9. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $|2x-3|=5\cdot|x+1|$,**
**β) $\sqrt{x^2-4x+4}-|2x+1|=0$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $|2x-3|=5\cdot|x+1| \Leftrightarrow 2x-3=\pm5\cdot(x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-3=5x+5$ ή $2x-3=-5x-5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-5x=5+3$ ή $2x+5x=-5+3 \Leftrightarrow -3x=8$ ή $7x=-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-\frac{8}{3}$ ή $x=-\frac{2}{7}$.

**β)** $\sqrt{x^2-4x+4}-|2x+1|=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}-|2x+1|=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-2|=|2x+1| \Leftrightarrow x-2=2x+1$ ή $x-2=-(2x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-2x=1+2$ ή $x+2x=2-1 \Leftrightarrow -x=3$ ή $3x=1 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=\frac{1}{3}$.

$\sqrt{x^2}=|x|$

**10. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 7| = 2x + 1$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό.

Δηλαδή πρέπει $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Τότε έχουμε:

$|x - 7| = 2x + 1 \Leftrightarrow x - 7 = 2x + 1$ ή $x - 7 = -2x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2x = 7 + 1$ ή $x + 2x = 7 - 1 \Leftrightarrow -x = 8$ ή $3x = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8$ ή $x = 2$.

**$|f(x)| = h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = \pm h(x)$, όπου $h(x) \geq 0$**

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 2$, διότι ικανοποιεί τον περιορισμό.

**11. Να λύσετε την εξίσωση $|2 + |x + 3|| = 3$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

$|2 + |x + 3|| = 3 \Leftrightarrow 2 + |x + 3| = 3$ ή $2 + |x + 3| = -3 \Leftrightarrow |x + 3| = 1$ ή $|x + 3| = -5$.

Η εξίσωση $|x + 3| = -5$ είναι αδύνατη, ενώ η πρώτη ισοδύναμα γίνεται:

$x + 3 = 1$ ή $x + 3 = -1 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = -4$.

**12. Να λύσετε την εξίσωση $3|x-1|+5=\frac{|x-1|}{2}+10$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Θέτουμε $|x - 1| = \omega$ και η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$3\omega + 5 = \frac{\omega}{2} + 10 \Leftrightarrow 2\cdot 3\omega + 2\cdot 5 = 2\cdot\frac{\omega}{2} + 2\cdot 10 \Leftrightarrow 6\omega + 10 = \omega + 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6\omega - \omega = 20 - 10 \Leftrightarrow 5\omega = 10 \Leftrightarrow \omega = 2$,

άρα $|x - 1| = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2$ ή $x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$.

**13. Να λύσετε την εξίσωση $|3-x|-\frac{|6-2x|}{3}=\frac{7}{2}+\frac{|x-3|}{4}$.**

**Λύση**

$|3-x|-\frac{|6-2x|}{3}=\frac{7}{2}+\frac{|x-3|}{4} \Leftrightarrow$

**$|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ και $|\alpha\cdot\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$**

$\Leftrightarrow |3-x|-\frac{|2\cdot(3-x)|}{3}=\frac{7}{2}+\frac{|3-x|}{4} \Leftrightarrow |3-x|-\frac{2|3-x|}{3}=\frac{7}{2}+\frac{|3-x|}{4}$ **(I)**.

Θέτουμε $y = |3 - x|$, οπότε:

$(\text{I}) \Leftrightarrow y-\frac{2y}{3}=\frac{7}{2}+\frac{y}{4} \Leftrightarrow 12\cdot y-12\cdot\frac{2y}{3}=12\cdot\frac{7}{2}+12\cdot\frac{y}{4} \Leftrightarrow 12y - 8y = 42 + 3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12y - 8y - 3y = 42 \Leftrightarrow y = 42$,

άρα $|3 - x| = 42 \Leftrightarrow 3 - x = -42$ ή $3 - x = 42 \Leftrightarrow x = 45$ ή $x = -39$.

**14. Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right| = 2$,**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**β) $|x+5|\cdot|x-3| - |x+5| = 0$.**

**Λύση**

**α)** Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|x+1|}{|x-1|} = 2 \Leftrightarrow |x+1| = 2\cdot|x-1| \Leftrightarrow x+1 = \pm 2(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 2x-2 \text{ ή } x+1 = -2x+2 \Leftrightarrow -x = -3 \text{ ή } 3x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = \frac{1}{3}, \text{ που είναι δεκτές.}$$

**β)** $|x+5|\cdot|x-3| - |x+5| = 0 \Leftrightarrow |x+5|\cdot|x-3| = |x+5| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |(x+5)(x-3)| = |x+5| \Leftrightarrow (x+5)(x-3) = \pm(x+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-3) - (x+5) = 0 \text{ ή } (x+5)(x-3) + (x+5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-3-1) = 0 \text{ ή } (x+5)(x-3+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+5)(x-4) = 0 \text{ ή } (x+5)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+5 = 0 \text{ ή } x-4 = 0 \text{ ή } x+5 = 0 \text{ ή } x-2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ ή } x = 4 \text{ ή } x = 2.$$

**15. Να λύσετε την εξίσωση $|2x-2| + 3\cdot|2-x| = 3x$.**

**Λύση**

| $x$ | $-\infty$     1 | 1     2 | 2     $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-2$ | $-$   0 | $+$ | $+$ |
| $2-x$ | $+$ | $+$   0 | $-$ |
| $\|2x-2\|+3\cdot\|2-x\| = 3x$ | $(-2x+2)+3(2-x) = 3x$<br>$-2x+2+6-3x = 3x$<br>$-8x = -8 \Leftrightarrow x = 1$,<br>που απορρίπτεται,<br>αφού $x < 1$. | $(2x-2)+3(2-x) = 3x$<br>$2x-2+6-3x = 3x$<br>$-4x = -4 \Leftrightarrow x = 1$,<br>που είναι δεκτή,<br>αφού $1 \leq x \leq 2$. | $(2x-2)+3(-2+x) = 3x$<br>$2x-2-6+3x = 3x$<br>$2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$,<br>που είναι δεκτή,<br>αφού $x > 2$. |

Επομένως λύσεις είναι οι $x = 1$ ή $x = 8$.

## 5η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Παραμετρικές εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:***

**α)** Κάνουμε πράξεις, χωρίζουμε τους γνωστούς από τους άγνωστους όρους, παραγοντοποιούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης, οπότε τη φέρνουμε στη μορφή $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$.

**β)** Βρίσκουμε τις τιμές της παραμέτρου α, για τις οποίες ισχύει $\alpha \neq 0$, και τη μοναδική λύση της εξίσωσης, $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

**γ)** Για κάθε τιμή της παραμέτρου που εξαιρέσαμε στο προηγούμενο βήμα λύνουμε την εξίσωση. Σε αυτή την περίπτωση, η εξίσωση είναι ταυτότητα ή αδύνατη.

**16.** **Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ τις ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:**
**α) $(\lambda-1)\cdot(\lambda+3)\cdot x=\lambda+3$, β) $\lambda\cdot(\lambda x+2)-3=4x+1$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** $(\lambda-1)\cdot(\lambda+3)\cdot x=\lambda+3$ **(I)**.

- Αν $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$ και $\lambda\neq -3$, η (I) έχει μοναδική λύση τη $x=\dfrac{\lambda+3}{(\lambda-1)(\lambda+3)} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\lambda-1}$.
- Αν $\lambda=1$: (I) $\Leftrightarrow 0x=4$, που είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda=-3$: (I) $\Leftrightarrow 0x=0$, που είναι ταυτότητα.

**β)** $\lambda\cdot(\lambda x+2)-3=4x+1 \Leftrightarrow \lambda^2x+2\lambda-3=4x+1 \Leftrightarrow \lambda^2x-4x=3-2\lambda+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda^2-4)x=4-2\lambda \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)x=-2(\lambda-2)$ **(II)**.

- Αν $(\lambda-2)(\lambda+2)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$ και $\lambda\neq -2$, η (II) έχει μοναδική λύση τη $x=\dfrac{-2(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda+2)} \Leftrightarrow x=\dfrac{-2}{\lambda+2}$.
- Αν $\lambda=2$: (II) $\Leftrightarrow 0x=0$, που είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda=-2$: (II) $\Leftrightarrow 0x=8$, που είναι αδύνατη.

**17.** **Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\lambda x+\lambda}{3}=\dfrac{\lambda x+1}{4}+\dfrac{\lambda^2+x}{12}$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ.**

**Λύση**

$\dfrac{\lambda x+\lambda}{3}=\dfrac{\lambda x+1}{4}+\dfrac{\lambda^2+x}{12} \Leftrightarrow 12\cdot\dfrac{\lambda x+\lambda}{3}=12\cdot\dfrac{\lambda x+1}{4}+12\cdot\dfrac{\lambda^2+x}{12} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\cdot(\lambda x+\lambda)=3\cdot(\lambda x+1)+\lambda^2+x \Leftrightarrow 4\lambda x+4\lambda=3\lambda x+3+\lambda^2+x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4\lambda x-3\lambda x-x=\lambda^2-4\lambda+3 \Leftrightarrow \lambda x-x=\lambda^2-4\lambda+3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda-3)$ **(I)**.

- Αν $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$, η (I) έχει μοναδική λύση τη $x=\dfrac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{\lambda-1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=\lambda-3$.
- Αν $\lambda=1$: (I) $\Leftrightarrow 0x=0$, που είναι ταυτότητα.

**18.** **Να λύσετε την εξίσωση $\lambda x+5\mu=4x+3\lambda-1$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών λ, μ.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

$\lambda x+5\mu=4x+3\lambda-1 \Leftrightarrow \lambda x-4x=3\lambda-5\mu-1 \Leftrightarrow (\lambda-4)x=3\lambda-5\mu-1$ **(I)**.

- Αν $\lambda-4\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 4$, έχουμε μοναδική λύση τη $x=\dfrac{3\lambda-5\mu-1}{\lambda-4}$.
- Αν $\lambda=4$: (I) $\Leftrightarrow 0x=11-5\mu$ **(II)**.
  - ➢ Αν $11-5\mu\neq 0 \Leftrightarrow \mu\neq\dfrac{11}{5}$, η (II) είναι αδύνατη.
  - ➢ Αν $\mu=\dfrac{11}{5}$, η (II) είναι ταυτότητα.

**19.** **Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25\cdot(x - \lambda + 4)$:**
**α) έχει μοναδική λύση, β) είναι αδύνατη, γ) είναι ταυτότητα.**

**Λύση**

$\lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25\cdot(x - \lambda + 4) \Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda^2 - \lambda + 5 = 25x - 25\lambda + 100 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda^2 x - 25x = \lambda^2 - 24\lambda + 95 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 25)x = \lambda^2 - 24\lambda + 95 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 5)x = (\lambda - 5)(\lambda - 19)$ **(I)**.

- Αν $(\lambda - 5)(\lambda + 5) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 5$ και $\lambda \neq -5$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση.
- Αν $\lambda = 5$: (I) $\Leftrightarrow 0x = 0$, που είναι ταυτότητα.
- Αν $\lambda = -5$: (I) $\Leftrightarrow 0x = 240$, που είναι αδύνατη.

Επομένως:
**α)** Η εξίσωση έχει μοναδική λύση αν $\lambda \neq 5$ και $\lambda \neq -5$.
**β)** Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\lambda = -5$.
**γ)** Η εξίσωση είναι ταυτότητα αν $\lambda = 5$.

**20.** **Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η εξίσωση $(\lambda^2 - 2)\cdot x + 5 = 6 + \lambda + \lambda x$ έχει πάντα λύση.**

**Λύση**

$(\lambda^2 - 2)\cdot x + 5 = 6 + \lambda + \lambda x \Leftrightarrow \lambda^2 x - 2x - \lambda x = 6 + \lambda - 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda - 2)x = \lambda + 1 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2)x = \lambda + 1$ **(I)**.

Για να έχει η (I) πάντα λύση, πρέπει είτε να έχει μοναδική λύση είτε να είναι ταυτότητα.

> **Η εξίσωση $\alpha x = \beta$ έχει πάντα λύση αν $\alpha \neq 0$ ή αν $\alpha = \beta = 0$.**

- Η (I) έχει μοναδική λύση όταν $(\lambda + 1)(\lambda - 2) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 2$ **(II)**.
- Η (I) είναι ταυτότητα όταν $[(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$ και $\lambda + 1 = 0] \Leftrightarrow [(\lambda = -1$ ή $\lambda = 2)$ και $\lambda = -1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda = -1$ **(III)**.

Από τις (II) και (III) βρίσκουμε ότι $\lambda \neq 2$.

**21.** **Αν η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda = 2\cdot(1 + 2x)$ έχει άπειρες λύσεις, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda x + 6 = 5x - 3\lambda$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική.**

**Λύση**

$\lambda^2 x - \lambda = 2\cdot(1 + 2x) \Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda = 2 + 4x \Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = 2 + \lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\lambda^2 - 4)x = \lambda + 2 \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2)x = \lambda + 2$ **(I)**.

Αφού η εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda = 2\cdot(1 + 2x) \Leftrightarrow (\lambda + 2)(\lambda - 2)x = \lambda + 2$ έχει άπειρες λύσεις, πρέπει να ισχύει ότι $\{(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$ και $\lambda + 2 = 0\} \Leftrightarrow \lambda = -2$.
Τότε η εξίσωση $\lambda x + 6 = 5x - 3\lambda$ γίνεται:
$-2x + 6 = 5x - 3\cdot(-2) \Leftrightarrow -2x - 5x = 6 - 6 \Leftrightarrow -7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
δηλαδή η εξίσωση $\lambda x + 6 = 5x - 3\lambda$ έχει μοναδική λύση τη μηδενική.

**22.** **Να διερευνήσετε την εξίσωση $\dfrac{2x+\mu}{2x-\mu}=\dfrac{4x^2+\mu x}{4x^2-4x\mu+\mu^2}$ για όλες τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

$$\frac{2x+\mu}{2x-\mu}=\frac{4x^2+\mu x}{4x^2-4x\mu+\mu^2} \Leftrightarrow \frac{2x+\mu}{2x-\mu}=\frac{4x^2+\mu x}{(2x-\mu)^2} \ \textbf{(I)}.$$

ΕΚΠ $=(2x-\mu)^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x-\mu \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \mu \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\mu}{2}$, οπότε:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow (2x-\mu)^2\cdot\frac{2x+\mu}{2x-\mu}=(2x-\mu)^2\cdot\frac{4x^2+\mu x}{(2x-\mu)^2} \Leftrightarrow (2x-\mu)(2x+\mu)=4x^2+\mu x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-\mu^2=4x^2+\mu x \Leftrightarrow \mu x=-\mu^2 \ \textbf{(II)}.$$

- Αν $\mu \neq 0$, έχουμε μοναδική λύση τη $x=\dfrac{-\mu^2}{\mu}=-\mu$, που είναι δεκτή.
- Αν $\mu=0$: (II) $\Leftrightarrow 0x=0$, που έχει λύση κάθε πραγματικό $x \neq 0$, αφού $x \neq \dfrac{\mu}{2}=\dfrac{0}{2}$.

**23.** **Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x\cdot(3\lambda^2+5)=4\cdot[\lambda^2\cdot(2x-1)+\lambda]$:**
**α) έχει ρίζα τον αριθμό 2, β) έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 2.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** Για να έχει η εξίσωση ρίζα τον αριθμό 2, πρέπει να την επαληθεύει, δηλαδή
$2\cdot(3\lambda^2+5)=4\cdot[\lambda^2\cdot(2\cdot2-1)+\lambda] \Leftrightarrow 6\lambda^2+10=12\lambda^2+4\lambda \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6\lambda^2+4\lambda-10=0 \Leftrightarrow 3\lambda^2+2\lambda-5=0$,
η οποία έχει $\Delta=64$ και $\lambda=1$ ή $\lambda=-\dfrac{5}{3}$.

**β)** Αντικαθιστούμε στην αρχική εξίσωση τα $\lambda$ που βρήκαμε και έχουμε:

- Αν $\lambda=1$, βρίσκουμε $x\cdot(3\cdot1^2+5)=4\cdot[1^2\cdot(2\cdot x-1)+1] \Leftrightarrow 8x=8x$, άρα έχουμε ταυτότητα, οπότε απορρίπτεται η τιμή $\lambda=1$.
- Αν $\lambda=-\dfrac{5}{3}$, βρίσκουμε:

$$x\cdot\left[3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2+5\right]=4\cdot\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^2\cdot(2x-1)+\left(-\frac{5}{3}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{25}{3}+5\right)=4\cdot\left(\frac{50x}{9}-\frac{25}{9}-\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{40x}{3}=\frac{200x}{9}-\frac{160}{9} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 120x=200x-160 \Leftrightarrow 200x-120x=160 \Leftrightarrow 80x=160 \Leftrightarrow x=2$,
η οποία είναι μοναδική λύση, οπότε η περίπτωση αυτή είναι δεκτή.

Συνεπώς $\lambda=-\dfrac{5}{3}$.

**24.** **Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda + 2)x = \mu^2 - 81$ και $(\mu^2 + 9\mu)x = \lambda^2 + 3$. Να αποδείξετε ότι, αν η πρώτη είναι ταυτότητα, η δεύτερη είναι αδύνατη ή έχει μοναδική λύση.**

**Λύση**

Η εξίσωση $(\lambda + 2)x = \mu^2 - 81$ είναι ταυτότητα αν έχει τη μορφή $0x = 0$, δηλαδή αν ισχύει ότι $\lambda + 2 = 0$ και $\mu^2 - 81 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ και $\mu = \pm 9$.

- Αν $\lambda = -2$ και $\mu = 9$, η δεύτερη εξίσωση γίνεται $(9^2 + 9\cdot 9)x = (-2)^2 + 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 162x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{162}$, δηλαδή έχει μοναδική λύση.
- Αν $\lambda = -2$ και $\mu = -9$, η δεύτερη εξίσωση γίνεται $[(-9)^2 + 9\cdot(-9)]x = (-2)^2 + 3 \Leftrightarrow 0x = 7$, η οποία είναι αδύνατη.

**25.** **Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα κ, λ ώστε να έχει λύση η εξίσωση $\dfrac{x}{\kappa} = \dfrac{x}{\lambda} + 2$;**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Για $\kappa \neq 0$ και $\lambda \neq 0$ έχουμε ότι $\dfrac{x}{\kappa} = \dfrac{x}{\lambda} + 2 \Leftrightarrow \kappa\lambda\dfrac{x}{\kappa} - \kappa\lambda\dfrac{x}{\lambda} = \kappa\lambda\cdot 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda x - \kappa x = 2\kappa\lambda \Leftrightarrow (\lambda - \kappa)\cdot x = 2\kappa\lambda$ **(I)**.

Για να έχει λύση η δοσμένη εξίσωση, αρκεί να έχει λύση και η ισοδύναμή της εξίσωση (I), δηλαδή αρκεί η (I) να μην έχει μορφή $0x = 2\kappa\lambda$ (αφού $\kappa\lambda \neq 0$). Επομένως πρέπει $\lambda - \kappa \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \kappa$, όπου $\kappa\lambda \neq 0$.

**Μια εξίσωση έχει λύση όταν δεν είναι αδύνατη.**

## 6η ΜΕΘΟΔΟΣ

### Προβλήματα που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

***Υπόδειξη:*** Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με χρήση εξίσωσης 1ου βαθμού, θέτουμε x την άγνωστη ποσότητα και κατασκευάζουμε την εξίσωση που προκύπτει από τα δεδομένα της άσκησης.

**26.** **Μια δεξαμενή σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις βάσης 12 m και 8 m. Αν περιέχει 144.000 λίτρα νερό, να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού.**

**Λύση**

Έχουμε ότι 12 m = 120 dm, 8 m = 80 dm, 144.000 λίτρα = 144.000 $dm^3$.
Έστω x dm το ύψος της στάθμης του νερού.
Το νερό εντός του δοχείου παίρνει το σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $\alpha = 120$ dm, $\beta = 80$ dm, $\gamma = x$ dm, οπότε θα ισχύει ότι:
$V = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma \Leftrightarrow 144.000 = 120\cdot 80\cdot x \Leftrightarrow 144.000 = 9.600\cdot x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 144.000 : 9.600 \Leftrightarrow x = 15$ dm $= 1,5$ m.

**$V = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma$,**
**α: το μήκος,**
**β: το πλάτος,**
**γ: το ύψος.**

**27. Ένας αγρότης έχει ένα οικόπεδο σχήματος τετραγώνου. Λόγω οικονομικών δυσκολιών πουλάει ένα τετράγωνο μέρος του οικοπέδου με πλευρά 420 m μικρότερη από την αρχική. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απομένει είναι 243,6 στρέμματα, να βρείτε την πλευρά του αρχικού οικοπέδου.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Έστω x m $(x > 420)$ η πλευρά του αρχικού οικοπέδου, το οποίο έχει εμβαδόν $x^2$ $m^2$.
Επομένως $(x - 420)$ m είναι η πλευρά του οικοπέδου που πούλησε, το οποίο έχει εμβαδόν $(x - 420)^2$ $m^2$.
Επίσης, 243,6 στρέμματα = 243.600 $m^2$. Τότε έχουμε ότι:

$$x^2 - (x - 420)^2 = 243.600 \Leftrightarrow x^2 - (x^2 - 840x + 176.400) = 243.600 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 840x - 176.400 - 243.600 = 0 \Leftrightarrow 840x - 420.000 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 840x = 420.000 \Leftrightarrow x = \frac{420.000}{840} \Leftrightarrow x = 500,$$

δηλαδή 500 m είναι η πλευρά του αρχικού οικοπέδου.

**28. Πόσα γραμμάρια χυμό ντομάτας πρέπει να προσθέσουμε σε 500 g ντοματοπολτό, ώστε να μειώσουμε την περιεκτικότητά του σε κιτρικό οξύ (διορθωτή οξύτητας) από 0,12% σε 0,1%;**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Έστω x τα γραμμάρια χυμού ντομάτας $(x > 0)$ που πρέπει να προσθέσουμε στα 500 g ντοματοπολτό, ο οποίος περιέχει $500 \cdot 0{,}12\% = 0{,}6$ g κιτρικό οξύ.
Τότε ο νέος ντοματοπολτός θα έχει βάρος $(500 + x)$ g και θα περιέχει $(500 + x) \cdot 0{,}1\%$ g κιτρικό οξύ.
Επομένως:

$$(500 + x) \cdot 0{,}1\% = 0{,}6 \Leftrightarrow 0{,}5 + 0{,}001x = 0{,}6 \Leftrightarrow 0{,}001x = 0{,}6 - 0{,}5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0{,}001x = 0{,}1 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}1}{0{,}001} \Leftrightarrow x = 100,$$ δηλαδή 100 g χυμό ντομάτας.

**29. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 12. Αν αντιστρέψουμε τη σειρά των ψηφίων, προκύπτει αριθμός κατά 54 μικρότερος. Να βρείτε τον αριθμό.**

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

Αφού το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού είναι 12, αν x το ψηφίο των δεκάδων, το ψηφίο των μονάδων θα είναι το $12 - x$ $(x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.
Επιπλέον, θα ισχύει:

$$10x + 12 - x = 10 \cdot (12 - x) + x + 54 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x + 12 - x = 120 - 10x + x + 54 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10x - x + 10x - x = -12 + 120 + 54 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 18x = 162 \Leftrightarrow x = \frac{162}{18} \Leftrightarrow x = 9.$$

**Ο διψήφιος xy είναι ίσος με 10x + y, όπου x οι δεκάδες και y οι μονάδες.**

Επομένως το άλλο ψηφίο είναι το $12 - 9 = 3$ και ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 93.

**7η ΜΕΘΟΔΟΣ**

## Επίλυση τύπου

***Υπόδειξη:*** Για να επιλύσουμε έναν τύπο ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή, φανταζόμαστε ότι στη θέση της μεταβλητής αυτής υπάρχει το x και ότι όλες οι άλλες μεταβλητές είναι γνωστές. Έτσι λύνουμε την εξίσωση ως προς x, κατά τα γνωστά.

**30.** **Να λύσετε τους τύπους ως προς $R_2$:**

**α)** $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, **β)** $V_1=\frac{V\cdot R_1}{R_1+R_2}$.

Παρόμοια άσκηση και στο σχολικό

**Λύση**

**α)** Για $R\cdot R_1\cdot R_2\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Leftrightarrow RR_1R_2\frac{1}{R}=RR_1R_2\frac{1}{R_1}+RR_1R_2\frac{1}{R_2}\Leftrightarrow R_1R_2=RR_2+RR_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_1R_2-RR_2=RR_1\Leftrightarrow (R_1-R)R_2=RR_1\Leftrightarrow R_2=\frac{RR_1}{R_1-R}\ (R_1\neq R).$$

**β)** Για $R_1\neq -R_2$ έχουμε:

$$V_1=\frac{V\cdot R_1}{R_1+R_2}\Leftrightarrow (R_1+R_2)V_1=\frac{V\cdot R_1}{R_1+R_2}(R_1+R_2)\Leftrightarrow (R_1+R_2)V_1=V\cdot R_1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_1V_1+R_2V_1=V\cdot R_1\Leftrightarrow R_2V_1=V\cdot R_1-R_1V_1\Leftrightarrow R_2=\frac{V\cdot R_1-R_1V_1}{V_1}\ (V_1\neq 0).$$

**! Δείτε κάποιες άλλες μορφές ασκήσεων...**

**31.** **Να λύσετε την εξίσωση**
**$(x+2)^3+(2x+5)^3+(3x+11)^3=3(x+2)(2x+5)(3x+11)$.**

**Λύση**

$(x+2)^3+(2x+5)^3+(3x+11)^3=3(x+2)(2x+5)(3x+11)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+2=2x+5=3x+11$ ή $(x+2)+(2x+5)+(3x+11)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{x+2=2x+5$ και $2x+5=3x+11\}$ ή $6x+18=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \{x=-3$ και $x=-6\}$ ή $6x=-18$.

**$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ $\Leftrightarrow$ $\alpha=\beta=\gamma$ ή $\alpha+\beta+\gamma=0$**

Επειδή δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα ότι $x=-3$ και $x=-6$, θα έχουμε ότι $6x=-18\Leftrightarrow x=-3$.

**32.** **Να λύσετε τις εξισώσεις: α) $\sqrt{x+5}=3$, β) $\sqrt[3]{x-2}=2$, γ) $\sqrt[3]{x+4}=\sqrt{x}$.**

**Λύση**

**α)** Για $x\geq -5$ έχουμε ότι:

$$\sqrt{x+5}=3\Leftrightarrow \sqrt{x+5}^2=3^2\Leftrightarrow x+5=9\Leftrightarrow x=4,$$

η οποία είναι δεκτή με βάση τον περιορισμό.

**β)** Για $x \geq 2$ έχουμε ότι:
$\sqrt[3]{x-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-2}^{\,3} = 2^3 \Leftrightarrow x - 2 = 8 \Leftrightarrow x = 10$,
η οποία είναι δεκτή με βάση τον περιορισμό.

**γ)** Για $(x \geq -4$ και $x \geq 0) \Leftrightarrow x \geq 0$ έχουμε ότι:
$\sqrt[3]{x+4} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+4}^{\,6} = \sqrt{x}^{\,6} \Leftrightarrow (x+4)^2 = x^3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 12x + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x-4) + 3x \cdot (x-4) + 4 \cdot (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x-4) \cdot (x^2 + 3x + 4) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 4 = 0$ ή $x^2 + 3x + 4 = 0$ (που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$),
άρα $x = 4$, η οποία είναι δεκτή με βάση τον περιορισμό.

**Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στο ΕΚΠ των τάξεων των ριζών.**

## Ερωτήσεις νέου τύπου

**Να σημειώσετε Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.**

1. Οι εξισώσεις $x + 2 = 5$ και $x - 2 = 5$ είναι ισοδύναμες. ☐
2. Η εξίσωση $4x + 1 = 4x + 1$ είναι ταυτότητα. ☐
3. Η εξίσωση $(\kappa + 1)x = \kappa$ είναι παραμετρική. ☐
4. Η εξίσωση $(\kappa + 1)x = \kappa$ είναι αδύνατη όταν $\kappa = -1$. ☐
5. Η εξίσωση $(\kappa^2 + 1)x = \kappa$ είναι αδύνατη. ☐
6. Η εξίσωση $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0$ έχει λύση το $x = 1$. ☐

**Για την εξίσωση $(\lambda^3 - 25\lambda) \cdot x = (\lambda + 5)(\lambda - 1)$, να αντιστοιχίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ της 1ης στήλης με τις λύσεις της εξίσωσης της 2ης στήλης.**

| | 1η στήλη | 2η στήλη | |
|---|---|---|---|
| | | Άπειρες λύσεις | Α |
| 1 | $\lambda = 1$ | Καμία λύση | Β |
| 2 | $\lambda = -5$ | Μοναδική λύση $x = 0$ | Γ |
| 3 | $\lambda = 5$ | Μοναδική λύση $x = 1$ | Δ |
| 4 | $\lambda = 4$ | Μοναδική λύση $x = -\frac{3}{4}$ | Ε |
| | | Μοναδική λύση $x = -\frac{4}{3}$ | ΣΤ |

**Να κυκλώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.**

**1.** Η εξίσωση $\kappa \cdot x = \lambda$ έχει μοναδική λύση όταν:

**Α.** $\kappa = 0, \lambda \neq 0$ **Β.** $\kappa = \lambda = 0$ **Γ.** $\kappa \neq 0$ **Δ.** τίποτα από αυτά

**2.** Για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(3\kappa^2 + 1)\cdot x = 5$ έχει:

**Α.** δύο λύσεις **Β.** άπειρες λύσεις **Γ.** καμία λύση **Δ.** μία λύση

**3.** Η εξίσωση $(\kappa^2 - 1)\cdot x = \kappa + 1$ έχει άπειρες λύσεις όταν:

**Α.** $\kappa = 0$ **Β.** $\kappa = -1$ **Γ.** $\kappa = 1$ **Δ.** $\kappa = 2$

**4.** Αν η εξίσωση $2(\kappa + 2)\cdot x = 5\kappa + 1$ έχει λύση το $x = 1$, τότε:

**Α.** $\kappa = 0$ **Β.** $\kappa = -1$ **Γ.** $\kappa = 1$ **Δ.** $\kappa = 2$

**5.** Η εξίσωση $\kappa(\kappa - \lambda)\cdot x = 2(\kappa - \lambda)$ έχει σίγουρα πραγματική λύση αν:

**Α.** $\kappa = \lambda$ **Β.** $\kappa \neq \lambda$ **Γ.** $\kappa \neq 0$ **Δ.** $\kappa = 0$

**6.** Η ισότητα $|2x + 1| = -2x - 1$ ισχύει αν:

**Α.** $x \leq 0$ **Β.** $x \leq -\frac{1}{2}$ **Γ.** $x \leq \frac{1}{2}$ **Δ.** $x < -\frac{1}{2}$

**7.** Η εξίσωση $|7x - 5| = -|x^2 + 8|$:

**Α.** είναι αδύνατη **Β.** είναι αόριστη **Γ.** έχει λύση $x = -1$ **Δ.** έχει λύση $x = \frac{5}{3}$

**8.** Η εξίσωση $|x - 2| = 4$ έχει λύση:

**Α.** $x = 6$ ή $x = 0$ **Β.** $x = 2$ ή $x = 6$ **Γ.** $x = -2$ ή $x = 6$ **Δ.** $x = 0$ ή $x = -2$

# Άλυτες ασκήσεις

## Α΄ Ομάδα

**1.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\frac{x-5}{4} = \frac{x-2}{7}$, **β)** $\frac{x+5}{3} + \frac{2-x}{2} + 1 = -2x$,

**γ)** $\frac{x-1}{3} + \frac{3-x}{4} = 5 - \frac{x}{6}$, **δ)** $\frac{4x-1}{5} - \frac{x+3}{7} = \frac{x}{2}$,

**ε)** $\frac{7(x-3)}{4} - \frac{3(2-x)}{5} - \frac{5(x-1)}{6} = x - 2$, **στ)** $\frac{5-3x}{2} - \frac{3+2x}{10} - \frac{5(x-1)}{8} = \frac{3x-2}{40}$.

**2.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\frac{3}{x-1} = \frac{5}{2x+1}$, **β)** $\frac{x}{x-1} = \frac{x-2}{x+3}$,

**γ)** $\frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0$, **δ)** $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2} = \frac{6}{x^2-4}$.

**3.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{3}{2x^2-3x}=\dfrac{5}{x}$, **β)** $\dfrac{3}{x^2+x-2}=\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$,

**γ)** $\dfrac{3}{4x+4}-\dfrac{1}{3(x-1)}=\dfrac{5}{6x^2-6}$, **δ)** $\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-x}$.

**4.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $2+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}+\dfrac{x-x^2-1}{x-1}=0$, **β)** $\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3+x^2}+\dfrac{3}{x^3-x^2}=\dfrac{x^4+6}{x^4-x^2}$.

**5.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $x^2(x+2)-4(x+2)=0$, **β)** $x(x^2-1)-3(x^2-1)=0$,

**γ)** $x^3-x-5x^2+5=0$, **δ)** $x^4-x^2-9x^2+9=0$.

**6.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $x^2\cdot(x-4)+2x\cdot(x-4)+(x-4)=0$, **β)** $x\cdot(x^2-1)-x^3+x^2=0$,

**γ)** $(x+1)^2+x^2-1=0$, **δ)** $x\cdot(x-2)^2=x^2-4x+4$,

**7.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $(x-2)^2-(2-x)(4+x)=0$, **β)** $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2)$,

**γ)** $x^3-2x^2-x+2=0$, **δ)** $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0$.

**8.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|2x-1|=5$, **β)** $|4-5x|=3$, **γ)** $|7+3x|=1$.

**9.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|7x-1|=-5$, **β)** $-|1-x|=-3$.

**10.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $|x+2|-3=5$, **β)** $|3-2x|+1=5$,

**γ)** $\dfrac{|x-2|}{3}+\dfrac{1}{2}=5$, **δ)** $\dfrac{|3x+5|}{2}-\dfrac{5}{4}=1$.

**11.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $|2x+7|=|5-x|$, **β)** $|12-5x|=|5-12x|$,

**γ)** $|3x+1|-|2x-5|=0$, **δ)** $\left|\dfrac{11-3x}{3x+2}\right|=1$.

**12.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|5x-3|=|3-5x|$, **β)** $|2+x|=-|2+x|$.

**13.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|x-3|=2\cdot|3+2x|$, **β)** $|2+x|=3\cdot|5+x|$.

**14.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|3+|2-x||=5$, **β)** $|5-|2x+1||=3$.

**15.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $2\cdot|x+1|=5\cdot|x+1|-7$, **β)** $|3-x|+1=5\cdot|3-x|-3$,

**γ)** $\dfrac{|x-2|}{3}+\dfrac{1}{2}=|x-2|$, **δ)** $\dfrac{|3x+5|}{2}+3=|3x+5|$.

**16.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $-|x+4| = 2\cdot|x+4| - 3$, **β)** $2(|\omega|+1) = -2|\omega|+1$,

**γ)** $\dfrac{|x|-4}{5} = \dfrac{|x|-3}{2} + \dfrac{4|x|-1}{3}$, **δ)** $|y| - \dfrac{|y|-1}{2} = -1$.

**17.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $2\cdot|5x-1| + 3 = 3\cdot|1-5x| - 5$, **β)** $2\cdot|7-2x| + 2 = 3\cdot|2x-7| - 6$,

**γ)** $\dfrac{|x-2|-3}{2} + \dfrac{7}{3} = \dfrac{|2-x|-1}{6}$, **δ)** $\dfrac{|2x+1|}{4} + \dfrac{9}{12} = |-1-2x| + \dfrac{5}{6}$.

**18.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\dfrac{|3x+4|}{5} - 3 = \dfrac{|6x+8|}{25}$, **β)** $|2x-1| - |2-4x| + |6x-3| = 2$.

**19.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $2|x| - 3x + 1 = 0$, **β)** $2|3x-2| - 4x = 5$.

**20.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $|x+7| - 2\cdot|2x-5| = 8$, **β)** $|2-5x| + |5+2x| = 7$,

**γ)** $|3x+2| + 5x = |x| - 11$, **δ)** $|13-11x| - 3\cdot|3x+2| = 15-2x$.

**21.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $|x+2| - |x-1| = 1 + |1-x|$, **β)** $|x+2| + |x-2| = |3x-1|$.

**22.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\sqrt{x^2-6x+9} = 5$, **β)** $\sqrt{9x^2+6x+1} - \sqrt{4x^2-20x+25} = 0$,

**γ)** $|10-3x|\cdot|x+2| = |x+2|$.

**23.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $(\lambda^2+1)\cdot x = \lambda+1$, **β)** $(\lambda^2+4)\cdot x = \lambda^4 - 16$.

**24.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $(\lambda-1)x = \lambda-1$, **β)** $(\lambda-1)x = \lambda$,

**γ)** $\mu x + \mu = x - 1$, **δ)** $(\mu+1)x = -\mu-1$.

**25.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\lambda^2 x - \lambda^2 = x - 4\lambda + 3$, **β)** $(\lambda+1)x + 9 = 2(\lambda+2x) + \lambda(\lambda-2)$,

**γ)** $\lambda^3 x - \lambda = 4\lambda x + 2$, **δ)** $x\lambda^2 - \lambda = \lambda x - 1$, **ε)** $\mu^2 x - 4x = \mu^2 - 4\mu + 4$.

**26.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $(\lambda^3-4\lambda)\cdot x = \lambda^2 + 2\lambda$, **β)** $(\lambda+3)\cdot x = 2\lambda+5$,

**γ)** $\dfrac{\lambda^2-4x}{3} + \dfrac{\lambda x+5}{2} = x - 3\lambda$, **δ)** $\dfrac{2\lambda x+1}{4} + \dfrac{8\lambda-x+5}{3} = \dfrac{2x}{3}$.

**27.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\lambda^2(x-1) = 4\cdot(4x+1) - 5\lambda$, **β)** $\lambda^2(x-1) = x-1$,

**γ)** $\lambda(\lambda x+6) = x + 12 + \lambda\cdot(\lambda-1)$, **δ)** $\lambda^2\cdot(\lambda^6 x + \lambda^4 - \lambda^2 - 1) = x - 1 - \lambda^4\cdot(1-\lambda^2)$.

**28.** Να λύσετε τις ακόλουθες εξισώσεις για κάθε τιμή των λ, μ $\in \mathbb{R}$:
**α)** $(\lambda - \mu)\cdot x = \lambda + \mu$, **β)** $(\lambda^2 - 4\mu^2)x = \lambda^2 + 2\mu\lambda$, **γ)** $\lambda x + \mu^2 = \mu x + 3\lambda\cdot(x + 2)$,
**δ)** $(\lambda + 3)\cdot x + \mu = \mu x + (2\lambda - 1)\cdot(2x - 3)$, **ε)** $\frac{x-\lambda}{2}+\frac{2x+\mu}{5}=\frac{x}{10}$.

**29.** Αν η εξίσωση $(4 - \alpha)x + \alpha^2 = 16$ έχει δύο λύσεις, να βρείτε τον α.

**30.** Να προσδιορίσετε τον $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση
$(\lambda + 4)x - 2\lambda - 4 = 5(x - \lambda) + \lambda(\lambda - 2)$ να έχει μοναδική λύση το μηδέν.

**31.** Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η εξίσωση
$\lambda(3x - 2) - 5 = 3(x + 2) + 2(\lambda + 1)$ να έχει λύση τον αριθμό $x = -2$.

**32.** Να προσδιορίσετε τους λ, μ ώστε η εξίσωση $3\lambda(2x + 5) + 1 = 5x - 3\mu$ να ισχύει για κάθε πραγματικό x.

**33.** Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση $3\lambda(5 - x) = 7\mu - 3x + 1$ είναι ταυτότητα, η εξίσωση $\mu\cdot(3x - 2) + 4\lambda x = 3\cdot(2\lambda - \mu) + 10x$ είναι αδύνατη.

**34.** Αν η εξίσωση $(4\lambda^2 - 1)\cdot x = 3\lambda - 1$ έχει μοναδική λύση, να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2\lambda x - 3 = x + 2$.

**35.** Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά μήκους 4 cm. Να βρείτε εσωτερικό σημείο Μ της πλευράς ΑΔ τέτοιο ώστε: **α)** $E_{ABM} + E_{MB\Gamma} = 2\cdot E_{M\Gamma\Delta}$, **β)** $E_{ABM} = 2\cdot E_{M\Gamma\Delta}$.

**36.** Το μήκος και το πλάτος ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι 10 m και 6 m αντίστοιχα. Αν αυξηθεί το μήκος του κατά 5 m, να βρείτε πόσο πρέπει να αυξηθεί το πλάτος του ώστε να διπλασιαστεί το εμβαδόν του.

**37.** Μια μητέρα είναι 34 ετών και η κόρη της είναι 7 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι τριπλάσια από την ηλικία της κόρης της;

**38.** Να επιλύσετε τους ακόλουθους τύπους:
**α)** $P\cdot V = n\cdot R\cdot T$ ως προς P και ως προς R, **β)** $Q = m\cdot c\cdot \Delta\theta$ ως προς Δθ.

**39.** Να επιλύσετε τους ακόλουθους τύπους: **α)** $d=\frac{m}{V}$ ως προς m και ως προς V,
**β)** $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ ως προς t, **γ)** $F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{d^2}$ ως προς $m_1$ και ως προς d.

**40.** Με τη βοήθεια των τύπων $S=\upsilon_0 t+\frac{1}{2}\cdot\alpha t^2$ και $\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t$ να αποδείξετε ότι
$S=\frac{\upsilon+\upsilon_0}{2}\cdot t$.

## Β΄ Ομάδα

**41.** Καταθέτουμε σε μια τράπεζα δύο κεφάλαια, που διαφέρουν κατά 2.500 ευρώ, με επιτόκιο 5% για το μεγαλύτερο κεφάλαιο και 7% για το μικρότερο. Αν μετά από ένα χρόνο τα δύο κεφάλαια εξισώνονται, να βρείτε τα αρχικά ποσά που καταθέσαμε.

**42.** Ένας χημικός πρέπει να αναμείξει δύο διαλύματα του ίδιου οξέος, το Α΄ περιεκτικότητας 7% και το Β΄ περιεκτικότητας 42% σε οξύ, για να προκύψει ένα μείγμα 50 λίτρων περιεκτικότητας 35% σε οξύ. Πόσα λίτρα από κάθε διάλυμα πρέπει να χρησιμοποιήσει;

**43.** Ένα τμήμα της Α΄ Λυκείου που αποτελείται από 30 αγόρια και κορίτσια έγραψε ένα τεστ στα Μαθηματικά, με μέσο όρο βαθμολογίας 15,56. Αν ο μέσος όρος βαθμολογίας των γραπτών των κοριτσιών ήταν 14,6 και των αγοριών 17, να βρείτε πόσα ήταν τα κορίτσια και πόσα τα αγόρια.

**44.** Σε μια γιορτή βρίσκονται 40 άτομα. Αν φύγουν 8 αγόρια και έρθουν 2 κορίτσια, τότε ο αριθμός των αγοριών είναι ίσος με τον αριθμό των κοριτσιών. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών.

**45.** Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν από το ίδιο σημείο και κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, το ένα ανατολικά με ταχύτητα $u_1 = 60$ km/h και το άλλο δυτικά με ταχύτητα $u_2 = 80$ km/h. Να βρείτε μετά από πόση ώρα τα αυτοκίνητα θα έχουν απόσταση 770 km.

**46.** Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε την εξίσωση
$(x-\kappa)(2x-\lambda)^2 = (x-\lambda)(2x-\kappa)^2$.

**47.** Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(x-1)^3 + (x+1)^3 + x^3 = 3x(x^2-\alpha+1)$ είναι ταυτότητα;

**48.** Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{x}{\alpha^{2004}\beta^{2005}} - \dfrac{x}{\alpha^{2005}\beta^{2004}} = \dfrac{1}{\beta^{2005}} - \dfrac{1}{\alpha^{2005}}$.

**49.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{3}$, **β)** $\dfrac{2x}{3+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1-x}}} = x-1$.

**50.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
**α)** $(x+2\beta)^3 + (2x+\beta)^3 + (5x+5\beta)^3 = 3\cdot(x+2\beta)\cdot(2x+\beta)\cdot(5x+5\beta)$,
**β)** $(x+\alpha+\beta)^3 + (x+\alpha+2\beta)^3 + (x-\alpha)^3 = 3(x+\alpha+\beta)(x+\alpha+2\beta)(x-\alpha)$.

**51.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $(3x-\alpha+\beta)^3 + (\alpha+\beta+x)^3 = (4x+2\beta)^3$,
**β)** $(3x+5\beta)^3 - (2x-6\beta)^3 = (11\beta+x)^3$.

**52.** Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x-3} = 0$.

**53.** Να διερευνήσετε την εξίσωση $\dfrac{x+3\lambda}{x-3\lambda} = \dfrac{x^2+15\lambda^2}{x^2-9\lambda^2}$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

**54.** Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $|2x + 3| = \lambda - 1$, **β)** $(3\lambda - 1)\cdot|x + 3| = 5$.

**55.** Να λύσετε την εξίσωση $|3x - |x - 2|| = 5$.

**56.** Να λύσετε την εξίσωση $\left||\,|x - 2| - 1| - 3\right| = 4$.

**57.** Να λύσετε την εξίσωση $\left|\dfrac{\dfrac{y+2}{y-2}+\dfrac{2-y}{y+2}}{1-\dfrac{y+3}{y+2}}\right|=1$.

**58.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $\sqrt{2x-1}=4$, **β)** $\sqrt{7-3x}=2$, **γ)** $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}$,

**δ)** $\sqrt{4-x}=3\sqrt{x-2}$, **ε)** $\sqrt{2+\sqrt{4+x}}=5$, **στ)** $\sqrt[3]{x+2}=1$,

**ζ)** $\sqrt[4]{3x-4}=5$.

**59.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\sqrt{2y+1}=3$, όταν $y=\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-1)^2}+3\sqrt{(2x+1)^2}$.

**60.** Δίνονται οι παραστάσεις $A = |x| + |1 - x|$ και $B = |x - 2| + x$. Αν $1 < x < 2$, να λύσετε την εξίσωση $A-B\left(x^3-\dfrac{x^2}{2}\right)=0$.

## Υποδείξεις – Απαντήσεις

**Απαντήσεις Σ-Λ:** **1.** Λ, **2.** Σ, **3.** Σ, **4.** Σ, **5.** Λ, **6.** Σ.

**Απαντήσεις Α:** **1.** Γ, **2.** Α, **3.** Β, **4.** Ε.

**Απαντήσεις Π-Ε:** **1.** Γ, **2.** Δ, **3.** Β, **4.** Γ, **5.** Α, **6.** Β, **7.** Α, **8.** Γ.

**1.** **α)** $x = 9$, **β)** $x = -2$, **γ)** $x = \frac{55}{3}$, **δ)** $x = 4$, **ε)** $x = 7$, **στ)** $x = \frac{115}{96}$.

**2.** **α)** $x = -8$, **β)** $x = \frac{1}{3}$, **γ)** $x = -1$, άρα αδύνατη, **δ)** $x = 16$.

**3.** **α)** $x = \frac{4}{3}$, **β)** αδύνατη, **γ)** $x = \frac{23}{5}$, **δ)** $x = -1$.

**4.** **α)** $x = \pm\sqrt{2}$, **β)** αδύνατη.

**5.** **α)** $x = 2$ ή $x = -2$, **β)** $x = 3$ ή $x = \pm1$, **γ)** $x = 5$ ή $x = \pm1$, **δ)** $x = \pm3$ ή $x = \pm1$.

**6.** **α)** $x = 4$ ή $x = -1$, **β)** $x = 0$ ή $x = 1$, **γ)** $x = 0$ ή $x = -1$, **δ)** $x = 2$ ή $x = 1$.

**7.** **α)** $x = 2$ ή $x = -1$, **β)** $x = 1$ ή $x = 2$, **γ)** $x = 2$ ή $x = \pm1$, **δ)** $x = 2$ ή $x = 1$.

**8.** **α)** $x = 3$ ή $x = -2$, **β)** $x = \frac{1}{5}$ ή $x = \frac{7}{5}$, **γ)** $x = -2$ ή $x = -\frac{8}{3}$.

**9.** **α)** Αδύνατη, **β)** $x = -2$ ή $x = 4$.

**10.** **α)** $x = 6$ ή $x = -10$, **β)** $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{7}{2}$, **γ)** $x = \frac{31}{2}$ ή $x = -\frac{23}{2}$, **δ)** $x = -\frac{1}{6}$ ή $x = -\frac{19}{6}$.

**11.** **α)** $x = -\frac{2}{3}$ ή $x = -12$, **β)** $x = \pm1$, **γ)** $x = -6$ ή $x = \frac{4}{5}$, **δ)** $x = \frac{3}{2}$.

**12.** **α)** Αόριστη, **β)** $x = -2$.

**13.** **α)** $x = -3$ ή $x = -\frac{3}{5}$, **β)** $x = -\frac{13}{2}$ ή $x = -\frac{17}{4}$.

**14.** **α)** $x = 0$ ή $x = 4$, **β)** $x = \frac{1}{2}$ ή $x = -\frac{3}{2}$ ή $x = \frac{7}{2}$ ή $x = -\frac{9}{2}$.

**15.** **α)** $x = \frac{4}{3}$ ή $x = -\frac{10}{3}$, **β)** $x = 2$ ή $x = 4$,

**γ)** $x = \frac{11}{4}$ ή $x = \frac{5}{4}$, **δ)** $x = \frac{1}{3}$ ή $x = -\frac{11}{3}$.

**16.** **α)** $x = -3$ ή $x = -5$, **β)** αδύνατη, **γ)** $x = \pm\frac{31}{49}$,

**δ)** αδύνατη.

**17.** **α)** $x = \frac{9}{5}$ ή $x = -\frac{7}{5}$, **β)** $x = \frac{15}{2}$ ή $x = -\frac{1}{2}$, **γ)** αδύνατη,

**δ)** αδύνατη.

**18.** **α)** $x = 7$ ή $x = -\frac{29}{3}$, **β)** $x = 1$ ή $x = 0$.

**19.** **α)** $x = 1$, **β)** $x = \frac{9}{2}$ ή $x = -\frac{1}{10}$.

**20.** **α)** $x = \frac{11}{5}$ ή $x = 3$, **β)** $x = 0$ ή $x = \frac{4}{7}$, **γ)** $x = -3$,

**δ)** $x = \frac{17}{2}$ ή $x = -\frac{4}{9}$.

**21.** **α)** $x = 3$ ή $x = \frac{1}{3}$, **β)** $x = -1$ ή $x = \frac{5}{3}$.

**22.** **α)** $x = 8$ ή $x = -2$, **β)** $x = -6$ ή $x = \frac{4}{5}$,

**γ)** $x = 3$ ή $x = -2$ ή $x = \frac{11}{3}$.

**23.** **α)** $x = \frac{\lambda+1}{\lambda^2+1}$, **β)** $x = \lambda^2 - 4$.

**24.** **α)** Αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = 1$, αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

**β)** Αν $\lambda \neq 1$, τότε $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$, αν $\lambda = 1$, αδύνατη.

**γ)** Αν $\mu \neq 1$, τότε $x = \frac{-\mu-1}{\mu-1}$, αν $\mu = 1$, αδύνατη.

**δ)** Αν $\mu \neq -1$, τότε $x = -1$, αν $\mu = -1$, ταυτότητα.

**25.** **α)** Αν $\lambda \neq \pm1$, τότε $x = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$, αν $\lambda = -1$, αδύνατη, αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

**β)** Αν $\lambda \neq 3$, τότε $x = \lambda + 3$, αν $\lambda = 3$, ταυτότητα.

**γ)** Αν $\lambda \neq 0, \pm2$, τότε $x = \frac{1}{\lambda(\lambda-2)}$, αν $\lambda = 2$ ή $\lambda = 0$, αδύνατη, αν $\lambda = -2$, ταυτότητα.

**δ)** Αν $\lambda \neq 0, 1$, τότε $x = \frac{1}{\lambda}$, αν $\lambda = 0$, αδύνατη, αν $\lambda = 1$, ταυτότητα.

**ε)** Αν $\mu \neq \pm2$, τότε $x = \frac{\mu-2}{\mu+2}$, αν $\mu = -2$, αδύνατη, αν $\mu = 2$, ταυτότητα.

**26.** **α)** Αν $\lambda \neq 0, \pm2$, τότε $x = \frac{1}{\lambda-2}$, αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = -2$, ταυτότητα, αν $\lambda = 2$, αδύνατη.

**β)** Αν $\lambda \neq -3$, τότε $x = \frac{2\lambda+5}{\lambda+3}$, αν $\lambda = -3$, αδύνατη.

**γ)** Αν $\lambda \neq \frac{14}{3}$, τότε $x = \frac{-2\lambda^2-18\lambda-15}{3\lambda-14}$, αν $\lambda = \frac{14}{3}$ αδύνατη.

**δ)** Αν $\lambda \neq 2$, τότε $x = \frac{-32\lambda-23}{6(\lambda-2)}$, αν $\lambda = 2$, αδύνατη.

**27.** **α)** Αν $\lambda \neq \pm4$, τότε $x = \frac{\lambda-1}{\lambda+4}$, αν $\lambda = 4$, ταυτότητα, αν $\lambda = -4$, αδύνατη.

**β)** Αν $\lambda \neq \pm1$, τότε $x = 1$, αν $\lambda = \pm1$, ταυτότητα.

**γ)** Αν $\lambda \neq \pm1$, τότε $x = \frac{(\lambda-3)(\lambda-4)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}$, αν $\lambda = \pm1$, αδύνατη.

**δ)** Αν $\lambda \neq \pm1$, τότε $x = \frac{1}{(\lambda^2+1)(\lambda^4+1)}$, αν $\lambda = \pm1$, ταυτότητα.

**28.** **α)** Αν $\lambda \neq \mu$, τότε $x = \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$, αν $\lambda = \mu = 0$, ταυτότητα, αν $\lambda = \mu \neq 0$, αδύνατη.

**β)** Αν $\lambda \neq \pm2\mu$, τότε $x = \frac{\lambda}{\lambda-2\mu}$, αν $\lambda = -2\mu$, ταυτότητα, αν $\lambda = 2\mu = 0$, ταυτότητα, αν $\lambda = 2\mu \neq 0$, αδύνατη.

**γ)** Αν $\mu \neq -2\lambda$, τότε $x = \frac{\mu^2-6\lambda}{2\lambda+\mu}$, αν $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ ή $(\mu, \lambda) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$, ταυτότητα, αν $\mu = -2\lambda \neq 0$ ή $\mu = -2\lambda \neq -3$, αδύνατη.

**δ)** Αν $\mu \neq 5 - 3\lambda$, τότε $x = \frac{3-\mu-6\lambda}{5-3\lambda-\mu}$, αν $(\mu, \lambda) = \left(7, -\frac{2}{3}\right)$, ταυτότητα, αν $\mu = 5 - 3\lambda \neq 7$, αδύνατη.

**ε)** $x = \frac{5\lambda-2\mu}{8}$.

**29.** Αρκεί η εξίσωση να είναι ταυτότητα, $\alpha = 4$.

**30.** $\lambda = 4$.

**31.** $\lambda = -\frac{7}{10}$.

**32.** Αρκεί να είναι ταυτότητα και $(\lambda, \mu) = \left(\frac{5}{6}, -\frac{9}{2}\right)$.

**33.** $(\lambda, \mu) = (1, 2)$.

**34.** $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$, οπότε $x = \frac{5}{2\lambda-1}$.

**35.** **α)** $AM = \frac{4}{3}$ cm, **β)** $AM = \frac{8}{3}$ cm.

**36.** 2 m.

**37.** 6,5 έτη.

**38.** **α)** $P = \frac{nRT}{V}$, $R = \frac{PV}{nT}$, **β)** $\Delta\theta = \frac{Q}{mc}$.

**39.** **α)** $m = d \cdot V$, $V = \frac{m}{d}$, **β)** $t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\alpha}$,

**γ)** $m_1 = \frac{F \cdot d^2}{G \cdot m_2}$, $d = \sqrt{G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{F}}$.

**40.** Χρήση του $\alpha = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$ και πράξεις.

**41.** 133.750 ευρώ και 131.250 ευρώ.

**42.** Α΄: 10 λίτρα και Β΄: 40 λίτρα.

**43.** Αγόρια: 12, κορίτσια: 18.

**44.** Αγόρια: 25, κορίτσια: 15.

**45.** 5,5 ώρες.

**46.** Αν $\lambda \neq \pm\kappa$, τότε $x = \dfrac{\kappa\lambda}{\lambda+\kappa}$, αν $\lambda = -\kappa \neq 0$, αδύνατη, αν $\lambda = \kappa$, ταυτότητα.

**47.** $\alpha = -1$.

**48.** Αν $\alpha \neq \beta$, τότε $x = \dfrac{\alpha^{2005} - \beta^{2005}}{\alpha - \beta}$, αν $\alpha = \beta \neq 0$, ταυτότητα.

**49.** **α)** $x = 5$, **β)** $x = 2$ ή $x = \dfrac{5}{3}$.

**50.** **α)** $x = -\beta$, **β)** $x = \dfrac{-\alpha - 3\beta}{3}$ ή ταυτότητα αν $\alpha = \beta = 0$.

**51.** **α)** $x = \dfrac{\alpha - \beta}{3}$ ή $x = -\alpha - \beta$ ή $x = -\dfrac{\beta}{2}$,

**β)** $x = \dfrac{-5\beta}{3}$ ή $x = 3\beta$ ή $x = -11\beta$.

**52.** $x^2 = -6$, άρα αδύνατη.

**53.** Αν $\lambda \neq 0$, τότε $x = \lambda$, αν $\lambda = 0$, λύση κάθε $x \neq 0$.

**54.** **α)** Αν $\lambda < 1$, αδύνατη, αν $\lambda \geq 1$, τότε $x = \dfrac{\pm(\lambda - 1) - 3}{2}$, **β)** αν $\lambda \leq \dfrac{1}{3}$, αδύνατη, αν $\lambda > \dfrac{1}{3}$, τότε $x = \dfrac{\pm 5}{3\lambda - 1} - 3$.

**55.** $x = -\dfrac{3}{4}$ ή $x = \dfrac{7}{4}$.

**56.** $x = 10$ ή $x = -6$.

**57.** $y = \dfrac{-2}{7}$ ή $y = \dfrac{2}{9}$.

**58.** **α)** $x = \dfrac{17}{2}$, **β)** $x = 1$, **γ)** $x = 4$, **δ)** $x = \dfrac{11}{5}$, **ε)** $x = 525$, **στ)** $x = -1$, **ζ)** $x = \dfrac{629}{3}$.

**59.** $y = 4$, $x = \dfrac{1}{4}$, $x = -\dfrac{4}{3}$.

**60.** $A = 2x - 1$, $B = 2$, $x = \pm 1$ ή $x = \dfrac{1}{2}$.